ISSN 0130-2221

КВАНТ

9
1980

НАУЧНО-ПОПУЛЯРНЫЙ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ
АКАДЕМИИ НАУК СССР И АКАДЕМИИ ПЕДАГОГИЧЕСКИХ НАУК СССР

К 1000-летию со дня рождения Авиценны (см. также с. 7,57). Бахрам в голубом дворце. *Семь планет.* Бухара, Бодлеянская библиотека.

Основан в 1970 году

Квант

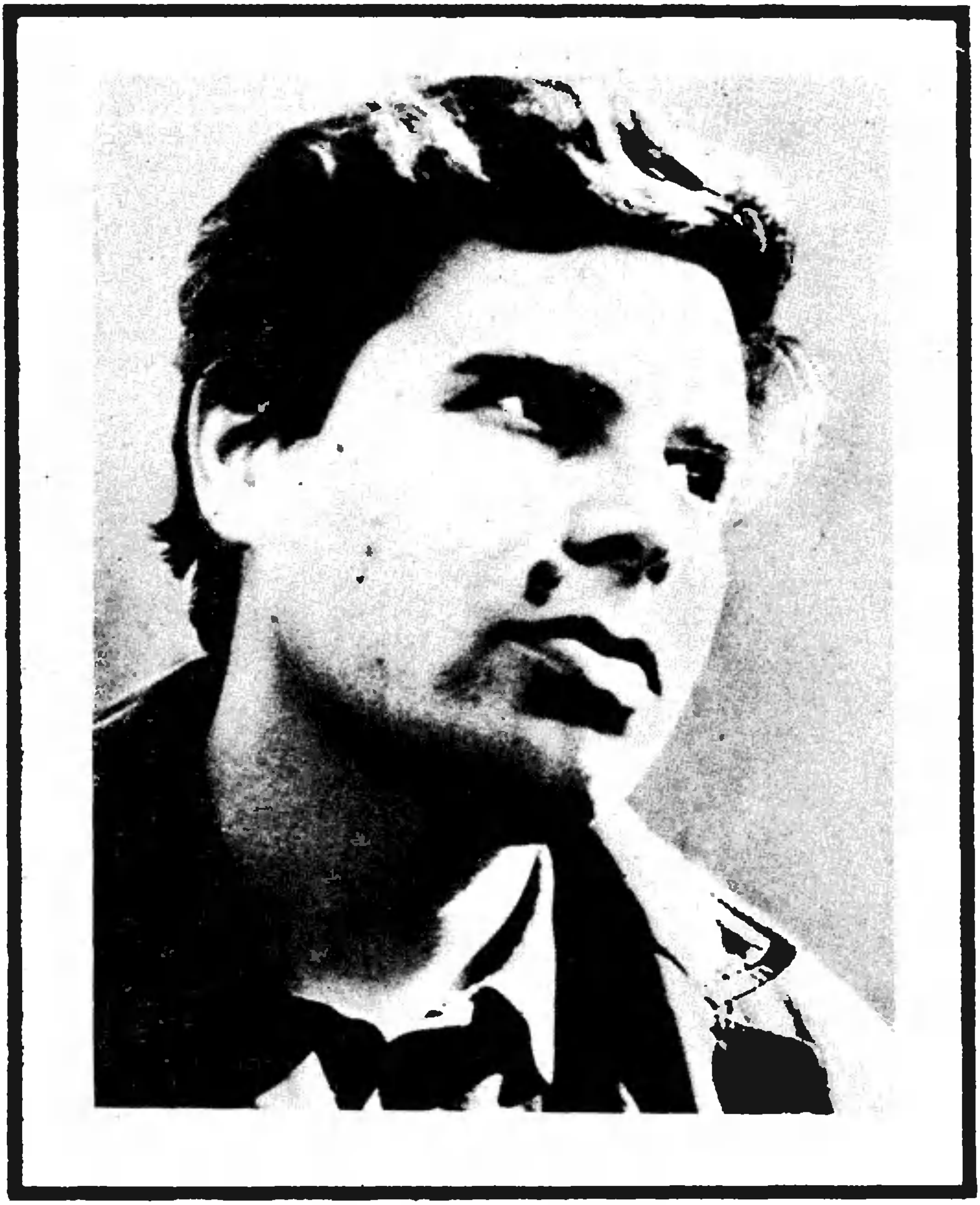
9
1980

Научно-популярный физико-математический журнал Академии наук СССР и Академии педагогических наук СССР

Издательство «Наука»
Главная редакция физико-математической литературы

Узор, изображенный на первой странице обложки, связан с понятием эволюты, о которой можно прочитать на с. 61.

В НОМЕРЕ:



Иосиф Шаевич Слободецкий

(апрель 1941 г. — июль 1980 г.)

Редакционная коллегия и коллектив редакции журнала «Квант», редакционная коллегия «Библиотечки «Квант» с глубокой скорбью сообщают о трагической гибели в автомобильной катастрофе 23 июля 1980 г. члена редакционной коллегии журнала «Квант», члена редакционной коллегии и ученого секретаря «Библиотечки «Квант», кандидата физико-математических наук Иосифа Шаевича Слободецкого.

Памяти друга

Редакционная коллегия журнала «Квант» понесла тяжелую утрату. Трагически погиб один из создателей журнала и самых активных его сотрудников кандидат физико-математических наук Иосиф Шаевич Слободецкий.

Талантливый, энергичный, необыкновенно трудоспособный человек, он полностью отдавался делу, никогда не теряя из виду главной цели — приносить пользу людям. За свою короткую, но такую яркую жизнь он успел сделать очень много.

И. Ш. Слободецкий родился 28 апреля 1941 г. в г. Киеве. После окончания средней школы он учился в Московском физико-техническом институте на факультете общей и прикладной физики, а затем работал в Институте физики высоких давлений АН СССР. Во всей его научной деятельности наряду с талантом и глубокой профессиональной эрудицией физика-теоретика проявлялся постоянный интерес к практическим приложениям теоретических исследований.

Безграничная любовь к детям и любовь к науке естественным образом привели Иосифа Шаевича к серьезной работе со школьниками. Поистине неоценим его вклад в дело привлечения к занятиям наукой новых поколений молодежи. Еще в студенческие годы И. Ш. Слободецкий был одним из инициаторов проведения физико-математических олимпиад МФТИ. В этой своей деятельности он был настоящим подвижником. Во многом благодаря его энтузиазму и блестящим организаторским способностям олимпиады МФТИ со временем выросли во Всероссийскую, а затем во Всесоюзную олимпиады школьников. Он умел убеждать людей, увлекать их своими идеями, настойчиво добиваться воплощения этих идей в конкретных делах. Центральную роль играл И. Ш. Слободецкий в создании и всей последующей работе редакции журнала «Квант». Он был бессменным руководителем раздела «Задачник «Кванта» по физике, активным организатором и принципиальным судьей всей работы отдела физики журнала. Читатели знают его также как постоянного автора журнала.

Много сил и энергии Иосиф Шаевич отдавал научно-популярной серии «Библиотечка «Квант», членом редакционной коллегии и ученым секретарем которой он был с момента создания этой серии. И. Ш. Слободецкий был научным редактором учебников по физике для средней школы и ряда научно-популярных книг, выходящих в издательствах «Наука», «Мир», «Просвещение». Много прекрасных задач по физике собрано в двух книгах, которые он недавно подготовил к печати. Активное участие И. Ш. Слободецкий принимал в работе Всесоюзного общества «Знание», где состоял членом научно-методического совета по пропаганде физико-математических знаний.

Глубокая научная интуиция, кипучая энергия и редкий дар общения, которым он обладал, вызывали глубокое уважение к нему друзей, коллег по работе. С ними он делился своими разнообразными научными и издательскими планами, проектами своих новых книг по физике. Трудно примириться с мыслью, что этим планам не суждено осуществиться.

Ушел из жизни талантливый физик, умный человек, сделавший так много доброго и полезного людям. Память о нем будут долго хранить в сердцах его друзья, все, кто сталкивался в жизни с этим прекрасным, светлым человеком.

И. Кикоин

Наука — дело молодых

Многие считают, что научные работы, открытия, формулировки законов природы — это результат работы маститых ученых, то есть людей почтенного возраста, накопивших знания и большой опыт в своей специальности. В действительности, как показывает история науки, дело обстоит не так: крупнейшие открытия делались молодыми людьми.

Хотя мне легче всего говорить о физиках, не могу не сказать о выдающейся работе Владимира Ильича Ленина «Развитие капитализма в России». Опубликована эта работа была в марте 1899 года, следовательно, написал Ленин ее в возрасте 28 лет. При подготовке этой работы он использовал, в общей сложности, около 600 книг и статей. Это — капитальный труд, в котором Ленин впервые, вопреки общепринятой тогда точке зрения, доказал, что послереформенная Россия развивалась по капиталистическому пути, в полном соответствии с учением Маркса. Работа оказала огромное влияние на революционное движение в России. Весь дальнейший ход событий блестяще подтвердил развитые в работе научные идеи ее автора. Замечу здесь же, что до этого Ленин успел написать свыше 30 произведений, в которых он разрабатывал программу и тактику партии.

Большинству людей хорошо знаком портрет Галилея — старца с большой бородой. Галилей (1564—1642) действительно жил долго, но первое свое крупное открытие в физике он сделал в 1583 году, когда ему было около 20 лет. Наблюдая за колебаниями люстры в соборе и сравнивая период колебаний с биением собственного пульса, он установил, что период колебаний люстры не зависит от амплитуды (закон изохронности маятника). Это открытие послужило основанием для создания часов. В возрасте 25 лет Галилей стал профессором. Вскоре он экспериментально установил свои знаменитые законы падения тел под действием силы тяжести.

Классическая механика, которая в течение двух с лишним веков служила основой физики, была создана Ньютоном, который родился в год смерти Галилея. Ньютон (1642—1727), так же как и Галилей, одно из крупнейших своих открытий — открытие закона всемирного тяготения — сделал в возрасте около 20 лет (по случайным обстоятельствам опубликовано оно было существенно позже).

Всем девятиклассникам известно имя знаменитого русского физика Эмилия Христиановича Ленца (1804—1865). Так называемое правило Ленца, касающееся направления индукционного электрического поля, было сформулировано им в 1833 году в работе «Об определении направления гальванических токов, возбуждаемых электродинамической индукцией». В это время Ленцу было 29 лет. В тридцатилетнем возрасте он был избран академиком.

Теоретической основой всей современной электротехники, радиотехники и оптики служат знаменитые четыре уравнения Максвелла. На этом основании Джеймса Клерка Максвелла (1831—1879) справедливо называют Ньютоном в электричестве. Свою первую работу Максвелл опубликовал, когда ему едва исполнилось 15 лет. В 25 лет он стал профессором Абердинского университета, а в 29 лет — профессором Королевского колледжа в Лондоне. Вскоре он опубликовал одну из важнейших своих работ под названием «Динамическая теория электромагнитного поля».

Дмитрий Иванович Менделеев (1834—1907), которого портретисты изображали обычно седовласым старцем с бородой, свою первую научную работу опубликовал в возрасте 21 года, еще будучи студентом Петербургского главного педагогического института. В 29 лет он был избран профессором. Свой знаменитый периодический закон, принесший ему всемирную славу, Менделеев открыл, когда ему было 35 лет.

Павел Николаевич Яблочков (1847—1894) в 1876 году, то есть в возрасте 29 лет, запатентовал дуговую лампу — первый электрический источник света — которая под названием «русского света» обошла почти все столицы мира.

Основание всей современной ядерной физики и техники было положено открытием радиоактивности, в изучении которой главную роль сыграла Мария Склодовская-Кюри (1867—1943). Тогда ей было около 30 лет. В 36 лет Мария Склодовская-Кюри получила, совместно с Пьером Кюри и Анри Беккерелем, одну из первых Нобелевских премий.

Петр Николаевич Лебедев (1866—1912) в возрасте 29 лет, занимаясь исследованиями в области кристаллооптики, показал полную аналогию между светом и электромагнитными волнами в миллиметровом диапазоне (в то время не было еще твердо установлено тождество между «искусственными» электромагнитными волнами и «натуральными» световыми волнами). Дальнейшее развитие этой работы привело его к знаменитому экспериментальному доказательству существования давления света.

Основоположник советской школы физиков Абрам Федорович Иоффе (1880—1960), столетие со дня рождения которого мы отмечаем в этом году, первоначально получил техническое образование, закончив Петербургский технологический институт в 1902 году. Заинтересовавшись физикой, он в том же году уезжает в Мюнхенский университет, в лабораторию знаменитого Рентгена, где в возрасте 25 лет с блеском защищает докторскую диссертацию. Вернувшись в Россию в 1906 году, Иоффе проводит ряд блестящих экспериментальных работ, снискавших ему всемирную известность. Так, он доказал, что катодные лучи представляют собой электрический ток и что электрический заряд меняется дискретно (последнее Иоффе сделал одновременно с Милликеном).

В 1905 году в немецком физическом журнале «Annalen der Physik» появились три статьи одного и того же автора, каждая из которых могла бы обеспечить ему бессмертие. Автором этих работ был Альберт Эйнштейн (1879—1955), которому в то время было всего лишь 26 лет. (В прошлом году весь мир отмечал 100-летие со дня его рождения.) Одна из этих работ под названием «К электродинамике движущихся тел» послужила началом революции в физике. В ней были изложены основы специальной теории относительности. Другая работа была посвящена изложению теории фотоэлектрического эффекта, за которую впоследствии Эйнштейн получил Нобелевскую премию. Третья работа называлась «О движении взвешенных в покоящейся жидкости частиц, требуемом молекулярно-кинетической теорией теплоты». Она способствовала превращению молекулярной гипотезы в молекулярную теорию. Еще 10 лет спустя Эйнштейн разработал общую теорию относительности, после чего его слава утвердилась на века.

В 1913 году была совершена вторая революция в физике. Она ознаменовалась выходом в свет работы датского физика Нильса Бора (1885—1962), которая положила начало квантовой теории строения атома. Автору этой работы было всего 28 лет.

Замечательный ученый, физик и механик, Александр Александрович Фридман (1888—1925) прожил всего 36 лет. Но за свою короткую жизнь он успел сделать ряд выдающихся открытий, оказавших существенное влияние на дальнейшее развитие науки. Ему принадлежит честь доказательства (на основании общей теории относительности) расширения Вселенной, которое в дальнейшем было подтверждено экспериментом. Он создал новую область механики, называемую сейчас газодинамикой. Он же положил начало современной динамической теории метеорологии.

Ряд выдающихся физиков нашей страны, начавших свою научную деятельность после Великой Октябрьской революции, таких как Игорь Васильевич Курчатов, Лев Давидович Ландау и многие другие, приобрели мировую известность благодаря своим научным работам, проведенным в молодые годы.

Из всего сказанного ясно, что человек, решивший посвятить себя научной работе, должен начинать ее как можно раньше — еще в студенческие, а лучше даже в школьные годы. Советское государство предоставляет для этого молодежи богатейшие возможности: она может участвовать в научных кружках и научных обществах; для нее издается ряд научно-популярных журналов, таких, например, как «Квант». Но надо ясно понимать, что крупный научный результат — это плод напряженного труда и исключительной целеустремленности научного работника.

Автор этих строк, признавая большую роль молодых научных работников в развитии науки, ни в коей мере не собирается умалять роль научных работников старшего поколения, которые в свое время вошли в науку, будучи молодыми. Именно у них сосредоточены богатейший научный опыт и обширные знания, которые они передают своим ученикам — молодым научным работникам. Крупный ученый подбирает себе достойных учеников и сам учится у них. Плох тот молодой научный работник, который не может ничему научить своего учителя, не может доставить ему радость гордиться его успехами.

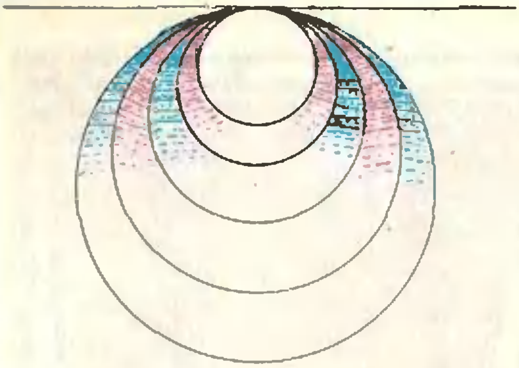
З. Усманов, И. Ходжиев

Математика в трудах великого медика

Абу Али ибн Сина (980—1037), известный всему миру под именем Авиценна, внес фундаментальный вклад в самые различные области человеческого знания. Его обширное наследие дошло до нас не полностью, а то, что дошло, еще изучено недостаточно. Общее число дошедших до нас трудов Авиценны оценивается специалистами от 100 до 500; среди них исследования по медицине, биологии, философии, логике, языкознанию, музыке, геологии, химии, физике, астрономии, механике.

Часть наследия Ибн Сины посвящена математике. Например, в своем энциклопедическом труде «Книга исцеления» и в комментариях к «Логике» и «Алмагесту» Птолемея «он дал, — пишет его ученик и первый биограф Джузджани, — сокращенное изложение [«Начал геометрии»] Евклида, арифметики и музыки и включил дополнения в каждую книгу по математическим наукам, так как нашел, что в дополнениях имеется настоятельная необходимость. Что касается «Алмагеста», то он включил [в него] десять геометрических предложений о параллаксе и добавил в конце «Алмагеста» такие вещи по астрономии, каких [до него] не существовало. Он добавил также к Евклиду некоторые теоремы, к арифметике [ряд интересных] тонкостей, а в музыке [затронул] вопросы, о которых не ведали [его] предшественники».

В его труде «Книга знания» также есть две математические главы — они посвящены геометрии и арифметике. По замыслу Ибн Сины эти главы должны были предшествовать соответственно главам «Астрономия» и «Музыка» и предназначаться для



их лучшего понимания. К сожалению, оригинальный текст был утерян. Впоследствии его восстановил Джузджани.

Геометрическая глава содержит изложение «Начал» Евклида с подробными доказательствами, нередко не совпадающими с доказательствами Евклида. Ибн Сина приводит даже доказательство V постулата Евклида (аксиомы параллельных), основанное на предположении о существовании равноотстоящих прямых (равносильном доказываемому постулату!).

В геометрической части «Книги исцеления» Ибн Сина дополняет аксиомы и постулаты Евклида аксиомами существования точки, линии и поверхности и аксиомой возможности выбора точки на линии или на поверхности. Ибн Сина систематически применяет к геометрическим величинам арифметическую терминологию, например говорит об умножении линий, что никогда не делали древние греки; терминология Ибн Сины сыграла существенную роль в расширении понятия числа (под которыми в древности понимали только натуральные числа), до того, что мы называем положительным действительным числом.

Сохранился очень интересный трактат Ибн Сины «Об исследовании угла», где он рассматривает так называемые «роговидные углы» — углы между двумя касающимися линиями (см. рисунок) — и показывает, что эти углы не удовлетворяют так называемой аксиоме Архимеда*), а так как Ибн Сина считал, что величины обязательно должны удовлетворять этой аксиоме, он приходит к выводу, что роговидные углы не являются величинами.

Как мы видим, Ибн Сина, в основном, интересуется проблемами математики, граничащими с логикой, большим знатаком которой он был (в ряде сочинений Ибн Сина развил логическое учение Аристотеля).

Приведем еще примеры арифметических результатов Ибн Сины, содержащихся в «Книге исцеления»:

1. Если дано число, которое, будучи разделено на 9, дает в остатке 1 или 8, то квадрат этого числа, деленный на 9, дает в остатке 1. Если число, деленное на 9, дает в остатке 2 или 7, то квадрат этого числа, разделенный на 9, дает в остатке 4. Если число, деленное на 9, дает в остатке 4 или 5, то его квадрат, деленный на 9, дает в остатке 7. Наконец, если число, деленное на 9, дает в остатке 3, 6 или 0, то его квадрат, разделенный на 9, дает в остатке 0.

2. Если число, деленное на 9, дает в остатке 1, 4 или 7, то его куб, деленный на 9, дает в остатке 1. Если число, деленное на 9, дает в остатке 2, 5 или 8, то его куб, деленный на 9, дает в остатке 8. И если число, деленное на 9, дает в остатке 3, 6 или 0, то его куб, деленный на 9, дает в остатке 0.

3. Если последовательные нечетные числа поместить в квадратной таблице, то сумма чисел, находящихся на каждой из диагоналей, будет равна кубу (размерности) стороны; сумма чисел, заполняющих квадрат, равна квадрато-квадрату (размерности) стороны квадрата.

Например, для квадратной таблицы размером 4×4 получаем $1+11+21+31=7+13+19+25=4^3$ и $1+3+5+\ldots+29+31=4^4$.

Математика затрагивается и в переписке Ибн Сины с его современником, великим среднеазиатским ученым Абу Райханом Беруни.

Даже такое беглое знакомство с математическим наследием Авиценны дает яркое представление о выдающемся энциклопедисте раннего средневековья.

*) *Если на прямой даны два отрезка A и B, то можно A повторить слагаемым столько раз, чтобы сумма была больше B:*

$$\underbrace{A+A+\ldots+A}_{n\ \text{раз}}=A\cdot n>B.$$

Если перефразировать это утверждение для положительных чисел a и b, то оно сведется к существованию такого натурального числа n, что $na>b$.

Разумеется, эта аксиома (как и любая другая) имеет смысл и становится вполне понятной только тогда, когда она рассматривается в составе некоторой системы аксиом (*прим. ред.*).

А. Варламов, А. Шапиро

Метод виртуальных перемещений

(об одном следствии закона сохранения энергии)

В 1717 году Иоганн Бернулли ввел новый метод решения статических задач — метод виртуальных перемещений. Метод этот прост и изящен, он позволяет рассчитывать условия равновесия сложных механических систем, не прибегая к громоздким выкладкам; с его помощью можно решать и гидростатические задачи, и задачи электростатики. В основе его лежит вытекающее из закона сохранения энергии свойство сил реакции связей: при малом отклонении системы от положения равновесия полная работа сил реакции связей равна нулю.

В этой статье на примере конкретных задач мы постараемся показать читателю, к каким красивым результатам приводит это следствие закона сохранения энергии.

Задача 1

Электрический заряд Q равномерно распределен по тонкой абсолютно жесткой металлической сфере радиуса R. Какая сила F действует на единицу площади поверхности со стороны остального заряда?

По условию сфера предполагается совершенно жесткой, поэтому ее реальный радиус R изменяться не может. Однако представим себе, что в результате отталкивания одноименных электрических зарядов радиус сферы чуть-чуть увеличился — на бесконечно малую величину δR. Иными словами, представим себе, что каждая точка сферы совершила бесконечно малое перемещение δR в направлении, перпендикулярном поверхности. Подчеркнем, что изменение радиуса δR — чисто воображаемое; однако с помощью этого воображаемого, мысленного перемещения точек сферы нам удастся решить задачу очень просто, и при этом δR, разумеется, в ответ не войдет.

Что произойдет при увеличении радиуса сферы на δR? Заряженная сфера обладает свойством конденсатора — она сохраняет сообщенный ей заряд. Потенциал поверхности сферы связан с зарядом сферы соотношением $\varphi = Q/4\pi\varepsilon_0\varepsilon R$. С другой стороны, согласно определению емкости $\varphi = Q/C$. Поэтому емкость заряженной сферы равна $C = 4\pi\varepsilon_0\varepsilon R$. Энергия такого конденсатора $W = Q^2/2C = Q^2/8\pi\varepsilon_0\varepsilon R$. При увеличении радиуса сферы энергия уменьшается: $W' = Q^2/8\pi\varepsilon_0\varepsilon(R+\delta R)$.

Таким образом, энергия сферы-конденсатора в результате увеличения радиуса сферы на величину δR уменьшается на величину

$$\Delta W = W - W' = \frac{Q^2 \cdot \delta R}{8\pi\varepsilon_0\varepsilon R(R+\delta R)}.$$

Согласно закону сохранения энергии это изменение энергии равно суммарной работе A сил электростатического отталкивания, действующих между отдельными элементами заряженной поверхности. Если F — сила, действующая на единицу площади сферы, то $A = 4\pi R^2 F \cdot \delta R$. Следовательно,

$$4\pi R^2 F \cdot \delta R = \frac{Q^2 \cdot \delta R}{8\pi\varepsilon_0\varepsilon R(R+\delta R)}.$$

Учитывая, что $\delta R \ll R$, из этого равенства находим

$$F = \frac{Q^2}{32\pi^2\varepsilon_0\varepsilon R^4}.$$

* * *

Использованная в процессе решения задачи идея совершения бесконечно малого мысленного перемещения, которое называют виртуальным, и лежит в основе метода виртуальных перемещений.

Обычно условия равновесия системы в статике записывают как равенства нулю суммы всех сил и суммы моментов всех сил, приложенных к каждой точке системы. При этом существующие в системе связи (опоры, стержни, нити и т. д.) характеризуются возникающими в них силами реакции. Необходимость учета сил реакции при написании условий равновесия в случае систем, состоящих из нескольких тел, приводит к громоздким расчетам. Однако имеется возможность избежать рассмотрения этих сил вообще.

Важным свойством сил реакции является тот факт, что их полная работа при малом отклонении системы от положения равновесия равна нулю. Это свойство сил реакции связано с законом сохранения энергии: так как поддержание связей в положении равновесия не требует расхода энергии (силы реакции приложены, однако нет смещения точек системы), то в результате действия связей не возникает выигрыша или затраты работы. Таким образом, мы приходим к утверждению, что при любом возможном малом отклонении системы от равновесия полная работа сил реакции равна нулю.

Но кроме сил реакции на точки системы действуют и внешние силы. Какова же их работа при том же малом перемещении из положения равновесия? Так как система первоначально покоится, то для любого перемещения системы необходимо совершить некоторую положительную работу. В принципе эту работу могут совершать внешние силы и силы реакции связей. Но, как мы уже знаем, полная работа всех сил реакции равна нулю. Поэтому, для того чтобы система вышла из состояния равновесия, суммарная работа внешних сил при любом возможном перемещении должна быть положительной. Следовательно, условие *невозможности* движения, то есть условие равновесия, мы можем сформулировать как требование неположительности полной работы внешних сил при любом возможном виртуальном перемещении: $\Delta A \leqslant 0$.

Допустим, что при перемещениях $\vec{\Delta r}_1$, $\vec{\Delta r}_2$, ..., $\vec{\Delta r}_N$ сумма работ внешних сил оказалась равной ΔA_1. А что произойдет, если система совершит перемещения $-\vec{\Delta r}_1$, $-\vec{\Delta r}_2$, ..., $-\vec{\Delta r}_N$? Эти перемещения так же возможны, как и первые; однако работа внешних сил теперь изменит знак: $\Delta A_2 = -\Delta A_1$. (В задаче со сферой такая процедура соответствовала бы не растяжению, а сжатию сферы.) Рассуждая аналогично предыдущему случаю, мы придем к выводу, что теперь условие равновесия имеет вид $\Delta A_1 \geqslant 0$, то есть работа внешних сил должна быть неотрицательной. Единственная возможность «примирить» два этих почти противоречивых условия — потребовать точного равенства нулю полной работы внешних сил при любом возможном виртуальном перемещении системы из положения равновесия: $\Delta A = 0$.

В таком виде мы и будем использовать принцип виртуальных перемещений при дальнейшем решении задач. Его обычно формулируют следующим образом:

> для равновесия любой механической системы с идеальными связями необходимо и достаточно, чтобы сумма элемантарных работ действующих на систему сил при любом возможном виртуальном перемещении была равна нулю.

Значение принципа виртуальных перемещений заключается, прежде всего, в том, что для нахождения условий равновесия с помощью этого принципа нет необходимости рассматривать большое число сил реакции связей, обеспечивающих равновесие сложных систем. Нет необходимости вникать в механизм осуществления этих связей вообще. Достаточно выбрать необходимые перемещения, которые допускают наложенные связи, вычислить соответствующую им полную работу внешних сил и приравнять ее нулю.

Частным случаем принципа виртуальных перемещений является зо-

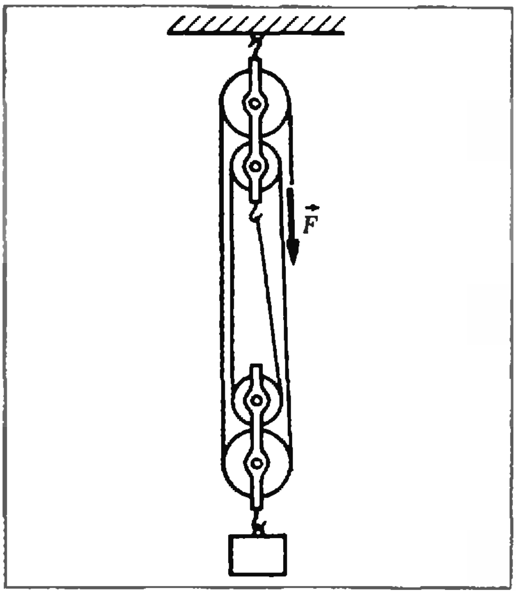


Рис. 1.

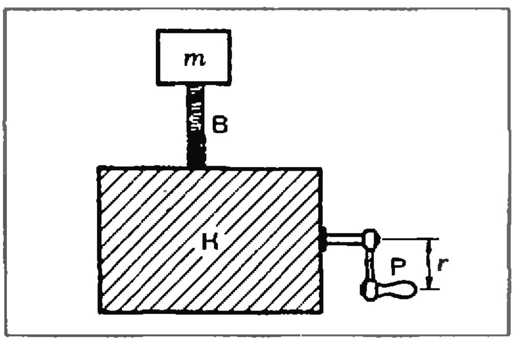


Рис. 2.

лотое правило механики: «Ни один простой механизм выигрыша в работе не дает. Во сколько раз мы выигрываем в силе, во столько раз мы проигрываем в расстоянии».

Рассмотрим некоторые примеры использования метода виртуальных перемещений при решении задач.

Задача 2

В системе, изображенной на рисунке 1, к нижнему блоку подвешен груз массы m. Какую силу F надо приложить к свободному концу нити, чтобы удерживать систему в равновесии? Размеры блоков подобраны таким образом, что все участки нити между блоками можно считать параллельными друг другу. Нить нерастяжима, блоки невесомы.

Представим себе, что точка приложения силы $\vec F$ перемещается вертикально вниз на расстояние δH. При этом груз m переместится вверх на расстояние $\delta h = {}^1/_4\delta H$ (этот результат очевиден из рисунка 1). Согласно принципу виртуальных перемещений

$$|\vec F|\delta H = |m\vec g|\delta h = (4|\vec F| - |m\vec g|)\delta h = 0.$$

Отсюда

$$|\vec F| = |m\vec g|/4.$$

(При решении этой задачи мы не выписывали условий равенства сил в положении равновесия; это демонстрирует бесспорное преимущество метода виртуальных перемещений.)

Задача 3

В коробке К (рисунок 2) заключен передающий механизм неизвестной конструкции. При повороте ручки Р вертикальный винт В плавно поднимается. При одном полном обороте (радиус оборота r) винт перемещается вверх на расстояние h.

На винт кладут груз массы m. Какое усилие надо приложить к ручке, чтобы удержать систему с грузом в равновесии?

Предположим, что система находится в равновесии, когда к ручке приложена сила, равная по абсолютной величине f.

Представим себе, что ручка совершает бесконечно малый поворот на угол $\delta\varphi$. Работа силы f равна

$$\delta A_1 = f\frac{2\pi r}{2\pi}\delta\varphi = fr\cdot\delta\varphi.$$

Груз m при этом поднимается на высоту $\delta h = \frac{h}{2\pi}\cdot\delta\varphi$. Сила тяжести mg совершает работу

$$\delta A_2 = -mg\frac{h\cdot\delta\varphi}{2\pi}.$$

Согласно принципу виртуальных перемещений

$$\delta A_1 + \delta A_2 = fr\cdot\delta\varphi - mg\frac{h\cdot\delta\varphi}{2\pi} = \left(fr - mg\frac{h}{2\pi}\right)\delta\varphi = 0,$$

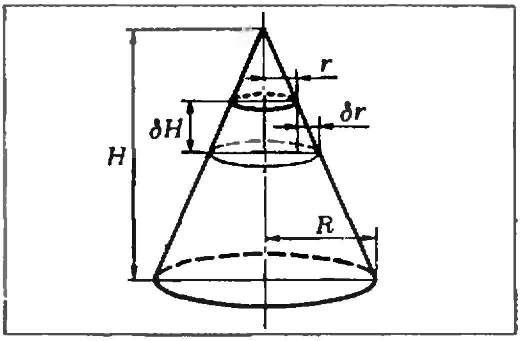


Рис. 3.

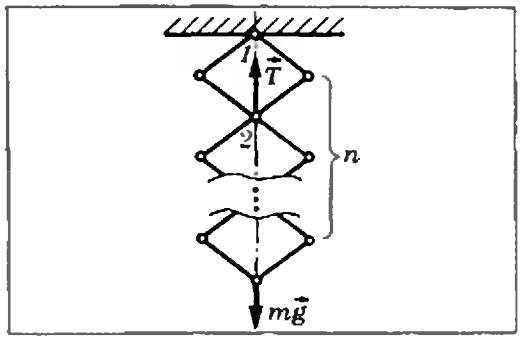


Рис. 4.

откуда находим f:

$$f = mg\frac{h}{2\pi r}.$$

(Обычными статическими методами задача в рассмотренной постановке не может быть решена вообще, так как ничего не известно о скрытом в коробке механизме передачи.)

Задача 4

Петля из гибкой тяжелой цепи массы m надета на гладкий прямой круговой конус, высота которого H, а радиус основания R (рисунок 3). Цепь покоится в горизонтальной плоскости. Найти натяжение цепи T.

Пусть радиус круга, образованного цепью, равен r. Совершим виртуальное перемещение цепи как целого вертикально вниз на расстояние δH. Уменьшение потенциальной энергии цепи при этом равно $mg\delta H$. Радиус же цепи при таком перемещении увеличился на δr. Увеличение радиуса цепи и ее смещение связаны соотношением $\delta r/\delta H = R/H$.

Работа сил натяжения T при рассматриваемом виртуальном перемещении цепи (виртуальная работа) равна

$$\delta A_1 = (2\pi(r+\delta r) - 2\pi r)T = 2\pi\cdot\delta r T.$$

Виртуальная работа силы тяжести равна

$$\delta A_2 = -mg\cdot\delta H.$$

Из условия

$$\delta A_1 + \delta A_2 = 2\pi\cdot\delta r\cdot T - mg\cdot\delta H = 0$$

находим

$$T = \frac{mg}{2\pi}\frac{\delta H}{\delta r} = \frac{mgH}{2\pi R}.$$

Задача 5

Имеется цепочка, содержащая n одинаковых невесомых звеньев, скрепленных шарнирно (рисунок 4). Пренебрегая трением, определить, какое натяжение должна выдерживать нить, соединяющая точки 1 и 2, если к цепочке подвешен груз массы m.

Представим себе, что груз m опустился на расстояние δh. Из соображений симметрии понятно, что при этом большая диагональ каждого из звеньев удлинилась на $\delta h/n$. Следовательно, виртуальное удлинение нити между точками 1 и 2, равное виртуальному перемещению точки 2, также равно $\delta h/n$.

Запишем условие равенства нулю виртуальной работы:

$$T\cdot\delta h/n - mg\cdot\delta h = 0$$

(T — сила натяжения нити). Отсюда

$$T = nmg.$$

* * *

В рассмотренных выше примерах мы использовали метод виртуальных перемещений для решения задач механики. Однако, как мы уже говорили, поле применимости этого метода гораздо шире. Например, формула избыточного давления внутри сферического пузыря — $p = \frac{4\sigma}{r}$ — может быть легко выведе-

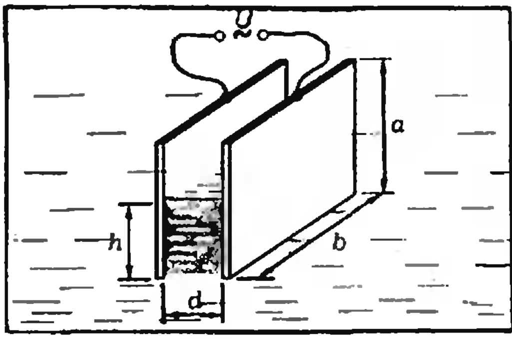


Рис. 5.

на с использованием метода виртуальных перемещений.

Пусть мыльный пузырь радиуса r находится в равновесии. Дадим его радиусу виртуальное приращение δr. Тогда виртуальная работа сил избыточного давления равна $\delta A_1 = F_{\text{изб}} \cdot \delta r = 4\pi r^2 p_{\text{изб}} \delta r$ (сила $F_{\text{изб}}$ избыточного давления направлена по нормали к поверхности пузыря). Виртуальная работа сил поверхностного натяжения равна изменению поверхностной энергии:

$$\delta A_2 = 2\sigma \cdot 4\pi (r^2 - (r+\delta r)^2) = -16\pi\sigma r\delta r$$

(у мыльного пузыря две поверхности).

Согласно принципу виртуальных перемещений

$$\delta A_1 + \delta A_2 = 4\pi r^2 p_{\text{изб}} \delta r - 16\pi\sigma r \delta r = 0.$$

Отсюда

$$p_{\text{изб}} = \frac{4\sigma}{r}.$$

Задача 6

Воспользуемся методом виртуальных перемещений для решения задачи по электростатике.

Жидкость с диэлектрической проницаемостью ε налита в большой сосуд. Две вертикально расположенные параллельные пластины касаются поверхности жидкости (рисунок 5). Расстояние между пластинами d. Пластины подключают к источнику с разностью потенциалов U. Какова будет высота h столба жидкости между пластинами после установления равновесия?

Рассмотрим систему в положении равновесия. Пусть размер пластины $a \times b$. Совершим виртуальное изменение высоты столба жидкости на δh. Тогда работа силы тяжести $\delta A_1 = -mg \cdot \delta h/2 = -\rho g h d b \cdot \delta h/2$. (Изменением массы столба жидкости из-за «втягивания» жидкости из сосуда в пространство между пластинами мы пренебрегаем, поскольку соответствующая работа силы тяжести по поднятию этой массы на высоту δh пропорциональна $(\delta h)^2$.)

Работа сил электрического поля равна изменению энергии конденсатора, образованного пластинами, при виртуальном изменении высоты столба жидкости на δh:

$$\delta A_2 = \delta E = \delta \frac{CU^2}{2} = \frac{U^2}{2} \cdot \delta C$$

(так как $U = \text{const.}$).

Рассматривая заполненную и незаполненную части конденсатора как два параллельно соединенных конденсатора, для полной емкости получим выражение

$$C = \frac{S_1}{4\pi d} + \frac{\varepsilon S_2}{4\pi d} = \frac{(a-h)b}{4\pi d} + \frac{\varepsilon hb}{4\pi d} = \frac{ab}{4\pi d} + \frac{(\varepsilon-1)hb}{4\pi d}.$$

Следовательно,

$$\delta C = \frac{(\varepsilon-1)b \cdot \delta h}{4\pi d}.$$

Таким образом,

$$\delta A_2 = \frac{U^2(\varepsilon-1)b \cdot \delta h}{8\pi d}.$$

Принцип виртуальных перемещений дает

$$\frac{U^2(\varepsilon-1)b \cdot \delta h}{8\pi d} - \rho g h b d \frac{\delta h}{2} = 0.$$

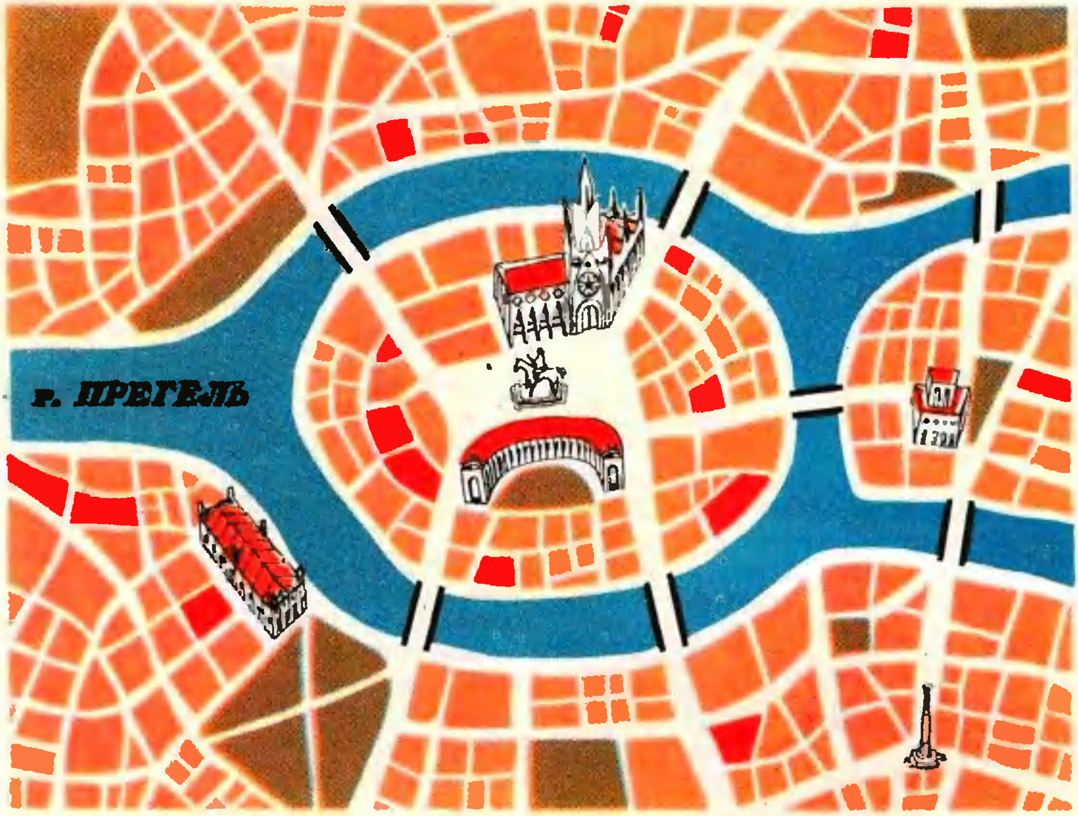
Отсюда

$$h = \frac{U^2(\varepsilon-1)}{4\pi\rho g d^2}.$$

*
* *

В заключение, чтобы вы могли проверить, насколько хорошо вами освоен метод виртуальных перемещений, мы предлагаем вам решить две задачи:

(Окончание см. на с. 26)



Е. Глушанков,
П. Певзнер

Переключательная игра Шеннона

Нельзя ли без полного перебора?

Стремительное развитие в XX веке производства, экономики и транспорта поставило перед математикой новые проблемы. Как управлять современным предприятием, как спланировать большой комплекс работ, как составить удобное расписание движения поездов — со всеми этими вопросами инженеры стали обращаться к математикам. Однако методы классической математики, предназначенные, в основном, для решения задач физики и механики, не могли дать ответа на такие вопросы. Это привело к появлению новых математических дисциплин — теории игр, теории графов, теории кодирования и многих других, объединяемых сейчас названием «дискретная математика».

Первая работа по дискретной математике (она принадлежит Леонарду Эйлеру), появившаяся еще в 1736 году, была посвящена известной головоломке о кенигсбергских мостах: можно ли совершить прогулку по Кенигсбергу (план города изображен на рисунке) таким образом, чтобы выйдя из дома, вернуться обратно, пройдя по каждому мосту ровно один раз? Долгое время дискретная математика занималась почти исключительно головоломками, и, поэтому находилась у серьезных математиков на положении Золушки. Однако уже в XIX веке дискретные методы применялись при изучении электрических цепей и молекулярных схем в химии.

Настоящий расцвет дискретной математики наблюдается в последние два—три десятилетия. Физика, химия, программирование, экономика, генетика, социология, лингвистика, антропология — это лишь часть длинного списка наук, в которых применяются методы дискретной математики.

В последнее время всеобщее внимание привлекли некоторые классические задачи дискретной математики, которые вот уже более ста лет ждут своего решения. Все эти задачи характеризуются тем, что если дан «кандидат в ответы», то очень легко проверить, действительно ли он является ответом, но очень трудно такой ответ найти: фактически приходится перебирать по очереди все возможные варианты.

С одной такой задачей занимающиеся математикой сталкиваются едва ли не каждый день. Это задача поиска доказательства данной теоремы. В самом деле, если доказательство дано, то проверить его правильность в принципе не трудно. Нужно лишь убедиться в том, что каждый шаг сделан в соответствии с правилами логики, а промежуточные утверждения следуют из аксиом и известных теорем. Но как это доказательство найти? Неужели перебирать все возможные рассуждения, начиная с аксиом? Если бы кто-нибудь мог объяснить, как он «догадывается», решая задачи, может быть, это помогло бы математикам научить машину делать то же самое.

А вот более простой пример: *задачи о разбиении*. Пусть $A=\{s_1, \ldots, s_N\}$ — конечное множество, содержащее натуральные числа. Требуется разбить множество A на два подмножества I и J ($I \cap J=\varnothing$, $I \cup J = A$) так, чтобы сумма элементов из I равнялась сумме элементов из J. Как и в предыдущем примере, для д а н н о г о разбиения множества A на множества I и J очень легко проверить, равны ли соответствующие суммы. Но как найти искомое разбиение? К сожалению, наука не может пока предложить ничего существенно лучшего, чем перебор всех 2^N вариантов. Но уже при $N=100$ современной вычислительной машине понадобятся миллиарды лет для проведения такого перебора.

В настоящее время распространено мнение, что для некоторых задач (например, задачи о разбиении) ничего существенно лучшего, чем полный перебор, предложить невозможно. Именно поэтому каждый пример эффективного алгоритма в той ситуации, где раньше приходилось довольствоваться перебором, представляет большой интерес для науки, даже если сама ситуация «игрушечная». Об одном таком примере и пойдет речь в этой статье.

В начале 50-х годов выдающийся американский математик и инженер, создатель теории информации К л о д Ш е н н о н предложил схему перебора вариантов для ш а х м а т н о й программы. Почти все современные шахматные программы являются, по существу, различными реализациями этой схемы. Однако число вариантов, перебираемых программами, играющими по алгоритму Шеннона, оказалось столь велико, что ни памяти, ни быстродействия современных ЭВМ недостаточно для их реализации.

Шеннон пытался применить свои методы к некоторым другим играм. Он рассмотрел игру на графах, которая называется теперь *переключательной игрой Шеннона* (сокращенно — ПИШ).

В настоящее время предложено несколько подходов к программированию игр. О методе, основанном на переборе с отсечением бесперспективных (с некоторой точки зрения) вариантов, «Квант» уже писал*. Другой метод (на его основе в середине 60-х годов А. Л е м а н предложил «идеального игрока» в ПИШ), связанный с полным отказом от перебора вариантов, опирается на некоторые новые результаты дискретной математики.

О том, как можно играть в ПИШ, не перебирая вариантов, мы и расскажем ниже.

Бридж-ит

В конце 50-х годов американец Гейл придумал игру Бридж-ит. Стандартное поле для игры Бридж-ит показано на рисунке 1. Один игрок соединяет синим карандашом синие точки, другой — красным карандашом красные. «Ходят» (то есть проводят отрезки) игроки по очереди. Выигрывает тот, кто первым построит ломаную, соединяющую две противоположные стороны своего цвета (на рисунке 2 партия закончилась победой красных).

---

*) Р. С. Г у т е р, М. В. Д о н с к о й *Машина играет в шахматы* («Квант», 1974 № 11).

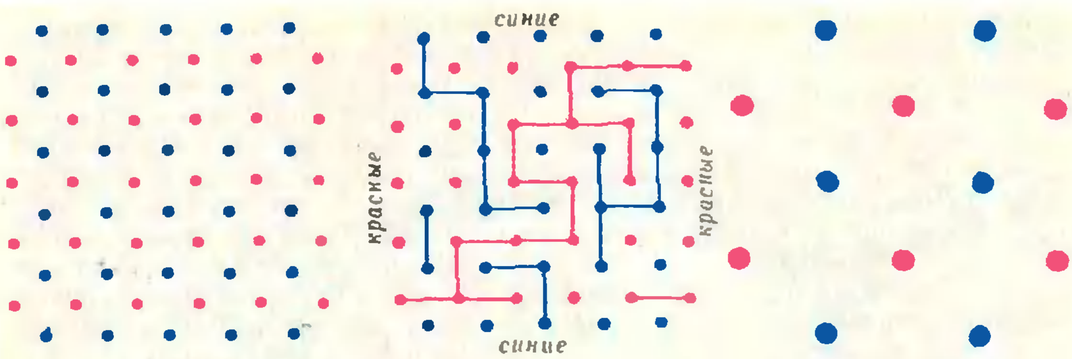


Рис. 1. Рис. 2. Рис. 3.

Попробуйте, поиграв в бридж-ит на маленьких полях (рис. 3), понять, у какого игрока — преимущество в этой игре, а затем попытайтесь разработать выигрышную стратегию для этого игрока.

Задача 1. Докажите, что в игре Бридж-ит «ничьих» не бывает.

Если в игре не бывает «ничьих», то один из игроков имеет выигрышную стратегию. Действительно, пусть, например, игрок A не имеет выигрышной стратегии, то есть на любой его ход у игрока B существует такой ответ, что игра не кончится победой A. Поскольку предположено, что в рассматриваемой игре нет «ничьих» партия кончится победой игрока B, то есть у B есть такая последовательность ходов, что, как бы ни играл A, все равно выиграет B. Таким образом, у игрока B существует выигрышная стратегия.

Только что приведенное рассуждение есть чистое доказательство существования: доказывается, что стратегия есть, но как ее найти — ни слова. А ведь это и есть самый интересный вопрос.

ПИШ

Чтобы описать выигрышную стратегию для игры Бридж-ит, перейдем от бридж-ит к ПИШ. Для этого изменим немного правила игры. На рисунке 4 все возможные ходы «синего» игрока отмечены синими отрезками, а «красного» игрока — красными. Мы будем называть такие рисунки «графами возможных ходов». Если вы уже поиграли в бридж-ит, то наверное поняли, что игрокам бессмысленно проводить отрезки, обозначенные на рисунке 4 пунктиром. Поэтому давайте вообще не будем их рассматривать и сделаем следующее: стянем все верхние точки в одну и то же самое сделаем с левыми, правыми и нижними точками (рис. 5). Теперь цель «синего» игрока — соединить путем из синих ребер вершины s и t, а цель «красного» — соединить красным путем вершины s' и t'.

Заметьте, что каждый красный отрезок пересекает ровно один синий. Поэтому, если «красный» игрок делает ход, то это, по существу, означает, что он делает невозможным один (и только один) ход «синего» игрока, то есть «красный» игрок своим ходом как бы в ы ч е р к и в а е т ребро синего графа. Но вместо того чтобы вычеркивать синее ребро, можно просто з а к р а с и т ь его красным цветом. Теперь мы можем вообще удалить красный граф из рисунка 5 и считать, что игра проходит так:

Два игрока по очереди красят ребра графа, у которого выделены вершины s и t: один — синим цветом, другой — красным (рис. 6). Цель «синего» игрока — соединить выделенные вершины путем*) из синих ребер, а цель «красного» игрока — помешать ему (что это значит, мы уточним позднее).

*) Напомним, что *графом* называется конечное множество точек (*вершин* графа) и соединяющих их отрезков (*ребер* графа). *Путь* — это линия на графе, не проходящая ни по какому ребру более одного раза.

Это и есть *переключательная игра Шеннона ПИШ).* Только Шеннон предложил ее в более общей постановке: во-первых, играть можно на любом графе и, во-вторых, на данном графе можно выделить любую пару вершин.

Каждый граф с двумя выделенными вершинами задает некоторый *вариант* ПИШ. Первый ход в каждом варианте может делать любой игрок — как «синий», так и «красный». Поскольку «синий» игрок соединяет вершины, его уместно назвать *Соединяющим* или *С-игроком.* А красного игрока мы назовем *Режущим* или *Р-игроком.*

Совершенно очевидно, что «ничьих» в ПИШ не бывает — *С* либо соединит выделенные вершины, либо нет. Поэтому один из игроков в ПИШ имеет выигрышную стратегию. Но какой? Как найти эту стратегию?

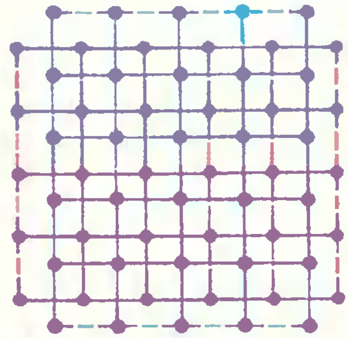


Рис. 4.

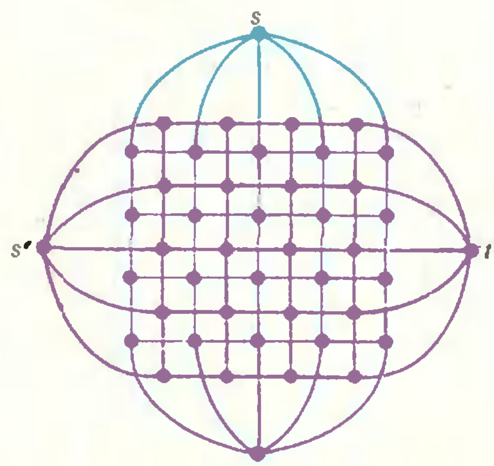


Рис. 5

Классификация вариантов ПИШ

Заметим, что *если игрок, играющий вторым, имеет выигрышную стратегию, то он имеет ее и в том случае, когда играет первым.* Действительно, играя первым, он закрасит своим цветом любое ребро, а потом будет отвечать на ходы противника так, как он делал бы это, играя вторым. Если на каком-то шаге надо будет покрасить ребро, которое он покрасил раньше, то он покрасит произвольное ребро. Так он и будет играть, имея одно «лишнее» ребро своего цвета, которое, конечно же, не может помешать ему выиграть.

Таким образом, с точки зрения возможности выиграть для каждого варианта ПИШ возможен один и только один из следующих трех случаев:

1. соединяющий имеет выигрышную стратегию, независимо от того, играет он первым или вторым;

2. режущий имеет выигрышную стратегию, независимо от того, играет он первым или вторым;

3. выигрышную стратегию имеет игрок, делающий первый ход.

Варианты ПИШ первой группы мы назовем *С-играми,* второй —

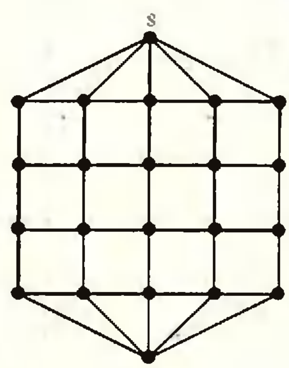


Рис. 6.

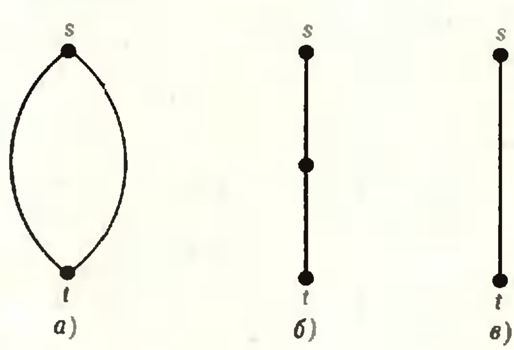


Рис. 7.

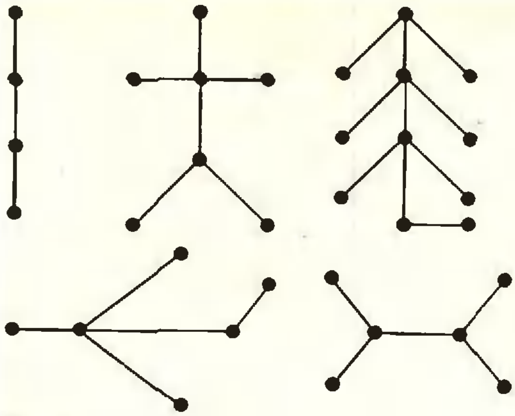


Рис. 8.

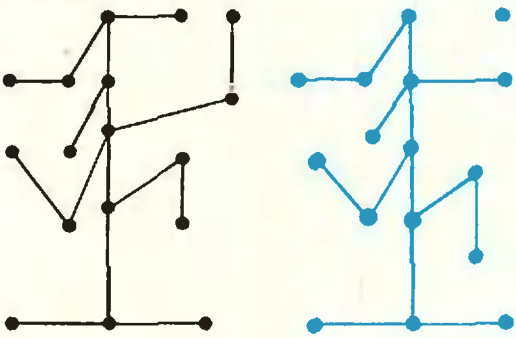


Рис. 9.

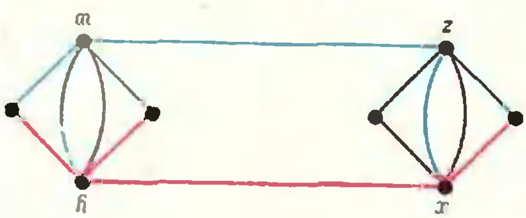


Рис. 10.

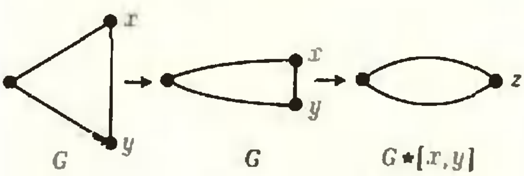


Рис. 11.

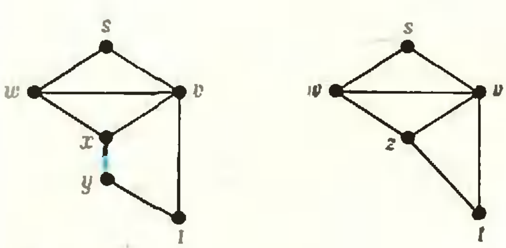


Рис. 12.

P-играми, третьей — *H-играми*. На рисунках 7, а)—в) изображены графы, дающие *С-игру*, *P-игру* и *H-игру* соответственно.

Задача 2. Докажите, что бридж-ит является *H*-игрой.

Немного теории

Давайте на некоторое время отвлечемся от игр и дадим несколько определений из теории графов, которые понадобятся в дальнейшем*.

Граф *G* называется *связным*, если в нем между любыми двумя вершинами существует путь. Несвязный граф представляет собой набор нескольких связных графов, каждый из которых называется его *компонентой*. Путь, в котором начальная и конечная вершины совпадают, называется *циклом*. Если в связном графе есть цикл, то при удалении любого ребра из цикла граф остается связным. Связный граф без циклов называется *деревом*. Примеры деревьев приведены на рисунке 8.

Легко видеть, что удаление любого ребра из дерева приводит к графу ровно с двумя компонентами, причем концы удаленного ребра лежат в разных компонентах (рис. 9). Ребро графа с концами x и y будем обозначать $\{x, y\}$. Ту компоненту, которая образуется при выбрасывании ребра $\{x, y\}$ из дерева A и содержит вершину x, обозначим через $A(x)$, а ту, которая содержит вершину y,— через $A(y)$.

Лемма о двух деревьях. *Пусть A и B — два дерева на одном и том же множестве вершин и $\{x, y\}$ — ребро дерева A. Тогда в дереве B существует ребро b, один конец которого лежит в $A(x)$, а другой — в $A(y)$* (рис. 10).

Новые правила игры

Чтобы научиться играть в ПИШ, мы опять немного изменим поле и правила игры. Для этого введем понятие стягивания графа.

---

*Подробнее о графах рассказано, например, в книге Л. Ю. Березиной «Графы и их применение» (М., «Просвещение», 1979).

Давайте будем укорачивать ребро $[x, y]$ в графе G до тех пор, пока его концы не сольются в одну вершину z (рис. 11). Из вершины z выходят теперь все те ребра, которые раньше выходили из вершин x и y (кроме самого ребра $[x, y]$). Эта операция называется *стягиванием ребра $[x, y]$ в графе G*, а граф, получающийся в результате этой операции, называется *стягиванием графа G по ребру $[x, y]$* и обозначается $G*[x, y]$.

Понятно, что стягивание дерева по любому ребру — снова дерево.

Давайте теперь посмотрим на ПИШ как на преобразование графа.

Когда игрок P закрашивает какое-то ребро красным цветом, он, по существу, запрещает проведение синего пути через это ребро, то есть как бы у д а л я е т ребро. Поэтому мы будем считать, что P во время своего хода не красит ребро, а удаляет его из графа. (Граф, получающийся в результате удаления ребра a из G, мы будем обозначать $G\setminus a$.)

А что делает игрок C? Закрашивая ребро синим цветом, он, по существу, стягивает это ребро (рис. 12)*).

Итак, мы играем в ПИШ следующим образом: *игрок P удаляет ребра, а игрок C стягивает; при этом C выигрывает, если на некотором шаге вершины s и t сливаются в одну, а P выигрывает, если на некотором шаге граф становится несвязным и вершины s и t оказываются в разных компонентах.*

Граф в процессе игры все время изменяется: после того, как P удалит из G ребро a, а C стянет ребро b, игра будет вестись на графе $(G\setminus a)*b$.

Теорема Лемана

Леман доказал, что *вариант ПИШ является C-игрой тогда и только тогда, когда в исходном графе имеются два дерева на одном и том же множестве вершин**), содержащие вершины s и t и не имеющие общих ребер.*

Мы докажем здесь только «половину» теоремы Лемана: если в исходном графе имеются нужные деревья, то C-игрок имеет выигрышную стратегию. (Доказательство второй «половины» мы не приводим, так как оно весьма сложно.) Для доказательства нам понадобится следующая

Л е м м а. *Пусть в исходном графе G есть два дерева A и B, удовлетворяющие условию Лемана. Пусть игрок P удалил ребро $a \in A$. Тогда игрок C может стянуть некоторое ребро $b \in B$ так, что в новом графе $(G\setminus a)*b$ либо вершины s и t слились, либо вновь найдутся два дерева A^* и B^*, удовлетворяющие условию Лемана.*

Д о к а з а т е л ь с т в о л е м м ы. После удаления ребра $a = [x, y] \in A$ дерево A разбивается на две компоненты: $A(x)$ и $A(y)$. По лемме о двух деревьях в дереве B существует ребро b, один конец которого лежит в $A(x)$, а другой — в $A(y)$. Поскольку деревья A и B не имеют общих ребер, $a \neq b$. Именно это ребро b и должен стянуть игрок C.

Пусть в графе $(G\setminus a)*b$ вершины s и t не слились, то есть $b \neq [s, t]$. Найдем тогда деревья A^* и B^*. Дерево B^* находится совсем просто — это $B*b$. Дерево A^* получается следующим образом: рассмотрим дерево, которое образуют компоненты $A(x)$, $A(y)$ и ребро b. Стянем это дерево по ребру b — это и будет дерево A^*.

Так как дерево A^* составлено из ребер дерева A, дерево B^* — из ребер дерева B, деревья A^* и B^*, так же как A и B, не имеют общих ребер. Очевидно, деревья A^* и B^* не пересекаются по ребрам и имеют одно и то же множество вершин, причем вершины s и t ему принадлежат.

Лемма доказана.

*) Для удобства обозначений будем считать, что если стягивается ребро, имеющее одним концом s (или t), то вершина, которая образуется в результате этого, снова будет называться s (соответственно t).

**) Это множество вершин в общем случае не совпадает с множеством вершин исходного графа.

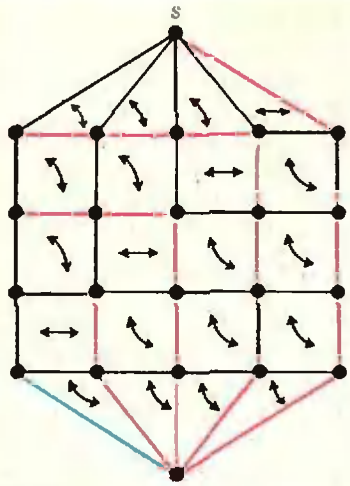


Рис. 13.

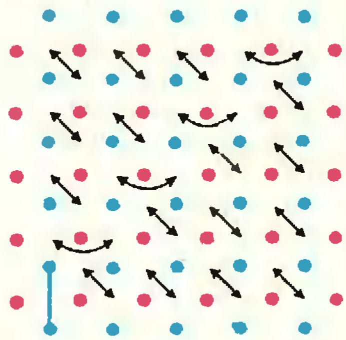


Рис. 14.

Эта лемма подсказывает стратегию для соединяющего игрока.

Цель игрока C — поддерживать в графе существование двух деревьев, удовлетворяющих условию Лемана (делая это, он обеспечивает существование двух путей между вершинами s и t, и игроку P никогда не удастся разъединить эти две вершины). И игрок C действительно может это сделать, если такие два дерева имелись в исходном графе. Если игрок P удаляет ребро a в одном из этих деревьев, то игрок C в ответ должен стянуть ребро из другого дерева, существующее по последней лемме. Если же игрок P удаляет ребро, которое не принадлежит ни одному из наших двух деревьев, то игрок C может стянуть ребро в одном из деревьев; ясно, что в новом графе по-прежнему найдутся два дерева Лемана (какие?).

После каждой пары ходов количество вершин в каждом из наших деревьев уменьшается на единицу, поэтому вершины s и t рано или поздно сольются и игрок C выиграет.

Мы научили вас играть в C-игру, используя два дерева Лемана. Но как находить эти деревья? Конечно, можно использовать полный перебор, однако это связано с огромными затратами времени даже на современных ЭВМ. Леману не удалось найти эффективного алгоритма для отыскания двух таких деревьев, поэтому некоторое время казалось, что теорема Лемана имеет лишь теоретический интерес. Только в начале 70-х годов Бруно и Вейнбергу удалось построить такой алгоритм.

На самом деле, Леман полностью решил переключательную игру Шеннона: он доказал также, что вариант ПИШ тогда и только тогда является P-игрой, когда в графе имеются два подграфа определенного вида. Если же вариант ПИШ является H-игрой, то после первого разумного хода мы получаем на новом графе вариант ПИШ, который является P-игрой или C-игрой — в зависимости от того, кто делал первый ход: P или C соответственно. Такой ход существует по определению H-игры. Найти этот ход в принципе можно перебором.

Стратегия для бридж-ит

Итак, мы рассказали, как играть в C-игры. Но ведь бридж-ит, согласно задаче 2, есть H-игра. Как же играть начинающему, чтобы выиграть?

Очевидно, что в игре бридж-ит начинающего можно считать C-игроком. Своим первым ходом он может стянуть, например, ребро, отмеченное на рисунке 13 зеленым цветом. В получающемся после этого хода графе имеются два дерева Лемана: они выделены на рисунке 13 красным и черным цветом. А затем игрок C может пользоваться описанной выше стратегией для C-игры. На рисунке 13 стрелочки расставлены таким образом, что если игрок P удаляет ребро, на которое указывает конец некоторой стрелочки, то игрок C в ответ должен стянуть ребро, на которое указывает другой конец этой же стрелочки (проверьте, что стрелочки расставлены в соответствии с доказанной леммой).

Задача 4. Укажите другие возможные «выигрышные» начальные ходы для игрока C.

Американский математик О. Гросс предложил ту же самую стратегию, что и на рисунке 13, задолго до Лемана, не сводя бридж-ит к ПИШ: По рецепту Гросса, для того чтобы выиграть, игрок C должен первым ходом провести отрезок, обозначенный на рисунке 14 синим цветом, а затем действовать так: если игрок P задевает своим ходом один конец некоторой стрелочки, то C ответным ходом должен задеть другой конец той же стрелочки.

А что дальше?

Научившись играть в ПИШ, Вы, возможно, уже задали себе вопрос: «А нельзя ли простые и эффективные дискретные методы, которые в случае с ПИШ привели к полному успеху, распространить на другие игры?» Попытки применить такие методы действительно были, однако они не дали результата даже для ближайшего «родственника» ПИШ — *вершинной переключательной игры Шеннона*. (Эта игра очень похожа на ПИШ, она также ведется на графе с двумя выделенными вершинами s и t, только красятся в ней не ребра, а вершины; при этом игрок C старается так покрасить вершины, чтобы от s к t можно было пройти путем, проходящим по вершинам своего цвета, а игрок P — помешать ему.) Более того, в 1976 году Ивен и Тарьян доказали, что найти выигрышную стратегию для вершинной переключательной игры Шеннона не менее просто, чем решить некоторые классические комбинаторные проблемы, для которых, как считают многие математики, вообще не существует эффективных алгоритмов решения. До окончательного решения подобных проблем еще далеко.

Список читателей, приславших правильные решения задач из Задачника «Кванта»

В этом номере мы публикуем фамилии читателей, приславших правильные решения задач М581—М600 и Ф588—Ф602.

Математика

Большинство читателей, приславших свои решения, успешно справились с задачами **М581, М582, М586—М590, М592.** Остальные задачи решили: *Э. Абдуллаев* (Масаллы) **91**; *А. Авербах* (Донецк) **85а), 91, 94**; *А. Агаев* (с. Покровка АзССР) **91, 99**; *М. Агиштейн* (Москва) **96, 98, 00**; *Р. Ардак* (Львов) **84**; *Л. Арушанов* (Баку) **85а), б), 96, 98**; *Г. Баламетова* (Кусары) **91**; *А. Балинский* (Львов) **84, 85а), б), 91, 94, 96—99**; *А. Барг* (Николаев) **91**; *Г. Барздинь* (Рига) **85а), б)**; *Д. Батуров* (Орел) **96**; *А. Белозеров* (Одесса) **85а), б), 91**; *А. Белокопытов* (Киев) **85а), б)**; *Ю. Белоцерковский* (Минск) **85б), 95, 99**; *А. Белюга* (Кривой Рог) **85а), б)**; *В. Бережной* (Киев) **91, 94—98, 00**; *С. Беспамятных* (Артемовский Свердловской обл.) **93—98, 00**; *А. Бишичаев* (Алма-Ата) **98**; *Н. Бовсуновский* (с. Путиловичи Житомирской обл.) **91**; *А. Боровских* (Воронеж) **98**; *А. Брагинский* (Волгодонск) **83, 85а), б), 91, 94, 95**; *Я. Брегман* (Киев) **85, 91, 94, 98—00**; *А. Бурин* (Москва) **83, 84, 85а), б), 91, 94, 95**; *Ю. Бушк* (Черемхово) **91**; *Э. Вайслеб* (Киев) **91**; *С. Василовский* (Ашхабад) **91, 95, 98—00**; *И. Владимиров* (Москва) **85, 91, 97—00**; *С. Волосивец* (Саратов) **91**; *А. Вольнов* (Киев) **91**; *М Гайсинский* (Ташкент) **85б), 91, 94**; *Д. Гешкенбейн* (Москва) **85**; *Л. Гитлин* (Витебск) **91, 94**; *Г. Гокадзе* (Кутаиси) **91**; *С. Горшков* (Москва) **98**; *Е. Горикова* (Пермь) **96**; *А. Градинер* (Баку) **91, 94**; *И. Деребас* (Магнитогорск) **98**; *Ш. Джафаров* (Кировабад) **91**; *Б. Добров* (Ангарск) **91**; *К. Дойков* (НРБ) **96—99**; *И. Драголов* (НРБ) **91, 94**; *О. Драч* (Кривой Рог) **85б)**; *Д. Дукиев* (с. Аркиван АзССР) **91**; *И. Елишевич* (Чернигов) **91**; *Т. Енчев* (НРБ) **96—99**; *А. Ермолик* (Петрозаводск) **84, 85, 91, 93—96, 98—00**; *А. Жилинский* (г. п. Крупки Минской обл.) **85, 94, 95**; *Е. Жиляев* (Москва) **85а), б)**; *А. Золотых* (Курск) **96, 98, 00**; *Ю. Иванов* (Воронеж) **99, 00**; *Ю. Ильясов* (Сназань) **91, 00**; *Ф. Кабдыкаиров* (Алма-Ата) **85а), б), 91, 93, 94**; *А. Кагарманов* (Белорецк) **91, 95, 00**; *П. Калугин* (Москва) **84**; *Р. Камалян* (Ереван) **91**; *А. Каплан* (Сумгаит) **84, 91, 93—00**; *А. Квариани* (Кутаиси) **91**; *А. Келарев* (Свердловск) **85а), б), 91, 94, 95**; *И. Колпаков* (Сочи) **97, 99, 00**; *О. Крижановский* (Харьков) **85, 97, 98**; *Е. Кузнецов* (Ижевск) **91, 98**; *С. Курчатов* (Саратов) **91, 94**; *Б. Лапидус* (Москва) **84**; *Б. Лейтес* (Москва) **84, 85а), б)**; *А. Липин* (Ленинград) **85а), 91, 96, 98, 99**; *Д. Лихачев* (Владивосток) **95**; *А. Мамедов* (с. Саатло ГССР) **91**; *Г. Маримон* (Могилев-Подольский) **91**; *А. Мегрецкий* (Ленинград) **84, 85, 91, 94, 95**; *В. Мельник* (Гайсин) **91**; *Л. Меркявичус* (Лентварис) **85а), б), 91**; *С. Мокроусов* (Ленинград) **84**; *С. Морейно* (Москва) **85а), б), 91, 95—00**; *Р. Набоков* (Саратов) **85**; *И. Нестеров* (Пскент) **85, 98**; *З. Нишниани* (Кутаиси) **91**; *С. Новаковский* (Саратов) **85, 91, 94, 96—00**; *В. Новохацкий* (Полтава) **91**; *П. Овчинников* (Вязники) **91, 00**; *М. Окроян* (Ереван) **91, 94**; *С. Осенний* (Киев) **84, 85а), б), 94**; *А. Павлычев* (Рига) **84, 91**; *Г. Перельман* (Ленинград) **85а), б), 91, 94, 96, 98—00**; *В. Пидстригач* (Львов) **84, 91, 93—96, 98—00**; *А. Поезд* (Москва)

(Продолжение см. на с. 33)

Е. Кузнецов, А. Рубенчик

О волнах на море и ряби на лужах

Бросая в воду камешки, смотри на круги, ими образуемые; иначе такое бросание будет пустою забавою.

Козьма Прутков

Из всех многочисленных типов волн, изучаемых физиками, волны на воде наиболее доступны наблюдению. Понятия амплитуды, длины волны и т. п. для них наглядны, а возникающие при их распространении явления знакомы и интересны. В то же время многие закономерности их распространения такие же, как и для световых или звуковых волн, и потому, «бросая в воду камешки», можно понять многое.

Волны на воде — весьма широкий круг явлений. Это морской прибой и рябь на лужах, огромные штормовые валы и медленное поднятие воды во время приливов, корабельные волны и сокрушающие все на своем пути цунами.

Изучать волны на воде начали очень давно. Первая теория — теория приливов — восходит еще к Ньютону и является прямым приложением его теории всемирного тяготения. Далее в изучении явлений на воде были и периоды затишья, и свой «золотой век», связанный с именами Рэлея и Стокса. Но вот что удивительно — очень интересные результаты в этом классическом разделе науки были получены совсем недавно. С их помощью удалось объяснить эксперименты, проделанные еще в прошлом веке.

В этой статье мы хотели бы рассмотреть некоторые явления, возникающие на поверхности жидкости, в частности — воды. Может быть, после этого вы будете немного по-другому смотреть на круги, расходящиеся от брошенного камня.

О скорости волн

Прежде всего выясним, как меняется скорость распространения волн в зависимости от длины волны (или, как говорят физики, найдем закон дисперсии волн).

В состоянии равновесия поверхность жидкости обычно горизонтальна. Если вывести ее из этого состояния (например, бросить камень), появляется сила, стремящаяся вернуть поверхность жидкости в исходное состояние. Жидкость приходит в движение, но не останавливается на прежнем уровне, а по инерции проскакивает его. Возникающие колебания жидкости распространяются по ее поверхности — появляются волны.

Какая же сила стремится сделать поверхность жидкости плоской? Очевидно, что она складывается из силы тяжести и силы поверхностного натяжения. Но, оказывается, роль этих сил для разных волн различна. При длинных волнах преобладает сила тяжести, поэтому длинные волны называют *гравитационными*. В случае очень коротких волн доминирует сила поверхностного натяжения, и потому короткие волны называют *капиллярными*. Несколько позже мы поясним, что значит «длинные» и «очень короткие» волны. А пока рассмотрим по отдельности гравитационные и капиллярные волны и выясним, как зависит скорость распространения волны от ее длины. Воспользуемся методом размерностей.

В случае гравитационных волн их скорость может зависеть от длины волны, глубины жидкости, ее плотности и ускорения свободного падения. (На самом деле, скорость распространения волн зависит еще от плотности воздуха, притяжения Луны и многих других факторов. Но их влияние весьма мало́ и не существенно.) Другими словами, скорость волны v является функцией от длины волны λ, глубины жидкости H, плотности ϱ и ускорения свободного падения g:

$$v=f(\lambda,\ H,\ \varrho,\ g).$$

Из соображений размерностей следует, что плотность не должна входить в ответ, так как лишь она одна из всех пяти величин содержит размерность массы. Кроме того, размерности λ и H одинаковы, а размерность времени содержится только в ускорении свободного падения. Следовательно, скорость распространения волны можно записать в виде

$$v=\sqrt{gH}\,\varphi\left(\frac{\lambda}{H}\right) \qquad (1)$$

или

$$v=\sqrt{g\lambda}\,\psi\left(\frac{H}{\lambda}\right), \qquad (2)$$

поскольку λ и H равноправны и ничем не выделяются по отношению друг к другу.

Рассмотрим, например, выражение (1) и конкретизируем его в двух предельных случаях — когда длина волны мала и когда она велика по сравнению с глубиной. В первом случае говорят о коротких волнах, или о волнах на глубокой воде. Во втором — о длинных волнах, или о волнах на мелкой воде. Вот несколько примеров. Когда вы бросаете камень в реку, длина возникающих волн будет порядка размера камня, который мал по сравнению с глубиной реки. Следовательно, волны можно считать короткими. Рябь на глубоких лужах, штормовые волны — это тоже короткие волны, то есть волны на глубокой воде. С другой стороны, существуют волны, для которых и океан — мелкая вода. Например, длина приливных волн порядка размера земного шара, так что для них какие-то 11 км глубины Марианской впадины! Или другой пример — цунами, гигантские волны, возникающие при «моретрясениях».

В случае коротких волн жидкость движется лишь в поверхностном слое толщиной порядка длины волны, так что скорость волн не должна зависеть от глубины жидкости. Следовательно, $\varphi\left(\frac{\lambda}{H}\right)=\alpha\sqrt{\frac{\lambda}{H}}$ и

$$v_{\text{кор}}=\alpha\sqrt{g\lambda}. \qquad (3)$$

Точный расчет дает, что $\alpha=1/\sqrt{2\pi}$.

В противоположном случае — длинных волн — в движение вовлекается вся жидкость, вплоть до дна, поэтому скорость волн не должна зависеть от длины волны: $\psi\left(\frac{H}{\lambda}\right)=$ $=\beta\sqrt{\frac{H}{\lambda}}$ и

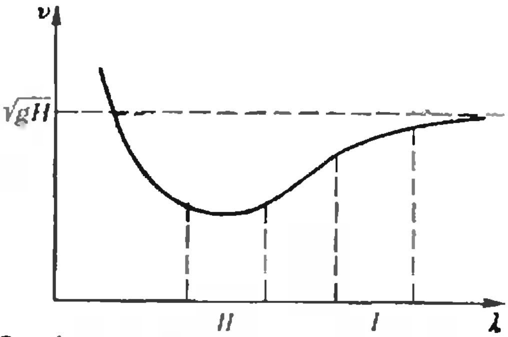


Рис. 1.

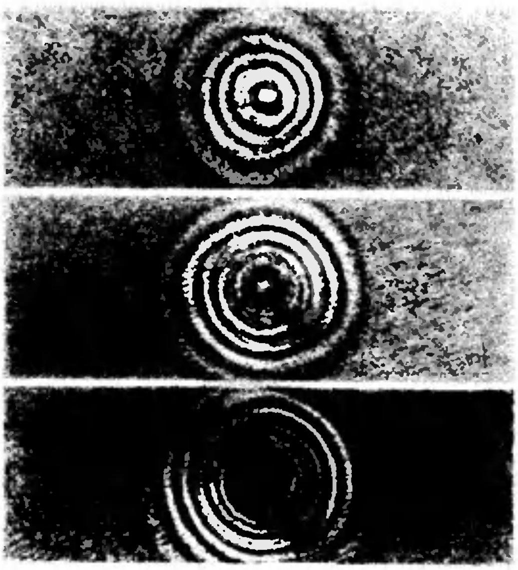


Рис. 2.

$$v_{дл}=\beta\sqrt{gH}\ . \qquad (4)$$

Согласно расчетам, $\beta=1$.

Теперь рассмотрим капиллярные волны с очень малой длиной волны, когда жидкость возвращается к равновесию не из-за силы тяжести, а за счет силы поверхностного натяжения. Их скорость может зависеть от длины волны λ, плотности жидкости ϱ и ее коэффициента поверхностного натяжения σ. Из этих величин можно составить единственную комбинацию, имеющую размерность скорости, поэтому скорость капиллярных волн

$$v_{кап}=\gamma\sqrt{\frac{\sigma}{\varrho\lambda}}\ , \qquad (5)$$

где $\gamma=\sqrt{2\pi}$.

Воспользуемся выражениями (3) — (5) и нарисуем график зависимости скорости распространения волн от длины волны во всем диапазоне длин волн (рис. 1). В области *I*, при $\lambda\sim2\pi H$, происходит переход от коротких гравитационных волн к длинным. Область II соответствует переходу от гравитационных волн к капиллярным. В этой же области скорость принимает минимальное значение (можно показать, что

$$v_{min}=\left(\frac{\sigma g}{\varrho}\right)^{1/4}).$$

Приведём несколько численных примеров, чтобы получить представление о характерных скоростях возбуждаемых волн:

— Длинные гравитационные волны в океане распространяются со скоростью того же порядка, что и скорость полета самолета. Для средней глубины океана $H\sim1$ км $v_{дл}\sim\sim360$ км/ч, а для максимальной глубины $H\sim10$ км $v_{дл}\sim1000$ км/ч.

— Брошенный в воду камень возбуждает короткие гравитационные волны, их скорость $v_{кор}\sim30$ см/с.

— Длина волны, при которой гравитационные волны переходят в капиллярные, для воды порядка 2 см, а соответствующая скорость $v_{кап}\sim20$ см/с.

Оказывается, зная зависимость скорости от длины волны, можно объяснить довольно много интересных явлений. Так, все вы, конечно, наблюдали разбегающиеся круги. Поскольку волны на воде не могут распространяться со скоростью, меньшей v_{min}, в центре расширяющейся системы кругов образуется область спокойной воды с радиусом $v_{min}t$ (рис. 2). Разбегающиеся капиллярные волны, отличающиеся малой амплитудой, видны плохо и, кроме того, быстро затухают. Для гравитационных волн затухание меньше, поэтому живут они дольше. Каждая из них двигается со своей скоростью v_λ. Впереди распространяются более длинные волны, затем — короткие. За время *t* волна длиной λ уйдет на расстояние $R=v_\lambda t=\sqrt{\frac{g\lambda}{2\pi}}\,t$. Другими словами, на расстоянии *R* через время *t* появятся волны длиной $\lambda\sim\left(\frac{R}{t}\right)^2$. Группа американских ученых, изучающих волнение, вызывае-

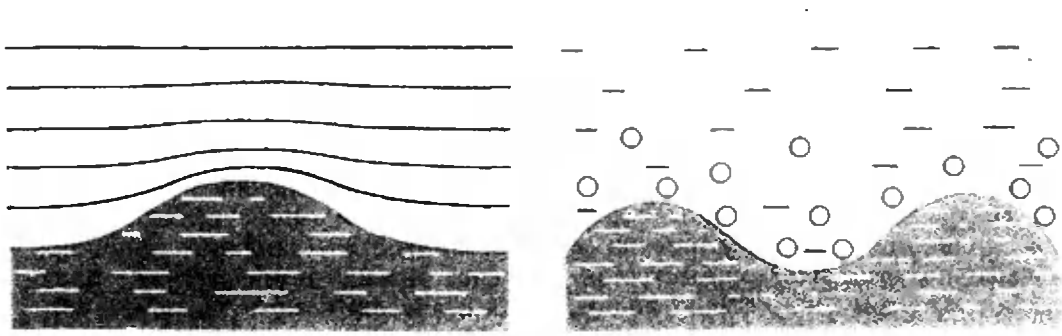


Рис. 3.

мое штормами в южной части Тихого океана, обнаружила, что таким образом можно определить расстояние до шторма, которое может составлять 2000 миль и даже более.

О возбуждении волн

Рассмотрим теперь, как возбуждаются волны на поверхности жидкости.

Первые попытки понять процесс возбуждения волн ветром были сделаны в середине прошлого века. Эту задачу решал выдающийся английский физик Томсон (лорд Кельвин) в предположении, что движение воздуха является ламинарным, как бы состоящим из отдельных струй. Над водным горбом эти струи воздуха сгущаются (рис. 3, *а*), скорость течения возрастает, а давление в этом месте, в соответствии с законом Бернулли, падает. При достаточно большой скорости ветра возникающая подъемная сила преодолевает стабилизирующее действие сил тяжести и поверхностного натяжения, и на поверхности воды возбуждаются волны. Интересно, что рассчитанная критическая скорость оказалась очень большой, в десятки раз превышающей наблюдаемую. Такое вопиющее расхождение между результатами теории и эксперимента много лет было одной из обсуждаемых проблем гидродинамики. Путем различных сложных и хитроумных усовершенствований теории удалось снизить критическую скорость в несколько раз. Однако парадокс оставался.

Объяснение его появилось только в конце пятидесятых годов нынешнего столетия. Оно основано на том, что слой воздуха, прилегающий к воде, не является ламинарным. Он состоит из множества мелких вихрей (рис. 3, *б*), или, как говорят физики, турбулизован. Вихри эти двигаются со скоростью ветра. Если скорость ветра меньше скорости волны, склон волны догоняет вихри, толкает их и, следовательно, отдает им энергию. При этом поверхность жидкости остается спокойной. Даже если возбудить волны, они быстро затухнут. Ситуация меняется, если вихри догоняют волну. Они «толкают» ее, отдают ей энергию и, следовательно, увеличивают ее амплитуду.

Такой процесс возбуждения волн не случайно называют резонансным. И действительно, это обычный резонанс. Точно с таким же резонансом вы сталкиваетесь, например, при быстром движении поезда, который трясется на стыках. Частота ν тряски определяется скоростью поезда u и длиной рельса l: $\nu = u/l$. Если частота ν совпадает с одной из собственных частот вагона, вагон сильно раскачивает. Так же обстоит дело и при возбуждении волн ветром. Здесь роль длины l принимает на себя длина волны λ, а скорость u представляет собой скорость ветра, то есть при резонансе скорость волны должна быть равна скорости ветра.

Поэтому, если скорость ветра превышает минимальную скорость волн v_{min}, случайно возникающие волны малой амплитуды будут усиливаться и нарастать. Рассчетное значение v_{min} хорошо согласуется с данными наблюдений.

Если скорость ветра близка к v_{min}, возбуждаются волны с длиной, близкой к λ_{min}, что составляет несколько сантиметров. Именно такие волны возникают на лужах при легких порывах ветра. С ростом скорости ветра появляются все более быстрые волны. Из рисунка 1 видно, что при этом возбуждаются как более длинные, так и более короткие волны. Но очень короткие волны, с длиной волны порядка миллиметра и меньше, заметны плохо и быстро затухают. Поэтому мы обычно видим, что с ростом скорости ветра u возбуждаются все более и более длинные волны. Например, при скорости ветра $\sim$40 км/ч, соответствующей шестибальному шторму, возбуждаются волны длиной вплоть до 60 м.

И последнее. Вы, конечно, замечали, что когда ветер слабый, волны маленькие, а во время шторма большие. Почему? Ясно, что энергия волны не может расти бесконечно. Как только амплитуда волны становится больше некоторой критической, гребень волны обрушивается. Опять-таки из соображений размерностей эта критическая амплитуда должна быть порядка длины волны. Во время шторма возбуждаются более длинные волны, и поэтому они дорастают до большой амплитуды.

Все явления, которые описаны выше, мы наблюдали много раз. Их легко моделировать. Например, эксперименты по возбуждению волн ветром можно проделать с помощью обычного вентилятора.

О разрушении сверхтекучести

В заключение нам хотелось бы заметить следующее. Интересно, что рассуждения, приведенные выше, годятся для объяснения совсем другого, достаточно далекого от волн на море явления,— разрушения сверхтекучести. Прежде всего объясним, что такое сверхтекучесть. Сверхтекучесть — это свойство жидкости протекать без трения через узкие капилляры. Оно присуще единственной жидкости — жидкому гелию при очень низких температурах, близких к абсолютному нулю ($T<2{,}2$К).

Оказывается, в жидком гелии также существуют волны. При больших длинах волн это звуковые волны, их скорость постоянна и не зависит от длины волны. С уменьшением длины волны скорость уменьшается, а при очень малых длинах волн снова увеличивается. Таким образом, зависимость скорости волн от длины волны для гелия похожа на такую же зависимость для поверхностных волн (см. рис. 1). Самое главное, что обе эти кривые имеют минимум.

Предположим, что скорость гелия в капилляре превышает минимальную скорость волн. Очевидно, тогда будет происходить возбуждение колебаний. При этом энергия поступательного движения гелия будет передаваться этим волнам, то есть возникнет трение и сверхтекучесть разрушится. Таким образом, максимальная скорость, при которой гелий сохраняет свойство сверхтекучести, равна минимальной скорости волн.

Любопытно, что это явление было обнаружено советским физиком П. Л. Капицей в 1937—1941 годах и нашло свое объяснение в работе другого советского физика Л. Д. Ландау в 1941 году, задолго до того, как был понят механизм возбуждения волн ветром.

Метод виртуальных перемещений

(Начало см. на с. 9)

1. Два однородных стержня массы которых m_1 и m_2, опираются на гладкие вертикальные стенки и гладкую горизонтальную поверхность (рисунок 6). Найдите соотношение между углами α_1 и α_2 при равновесии системы.

2. Решите задачу 5 при условии, что масса каждого шарнира равна M.

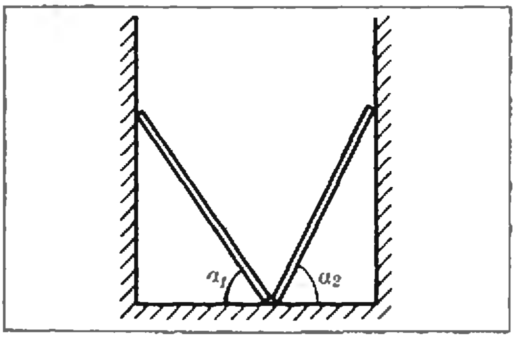


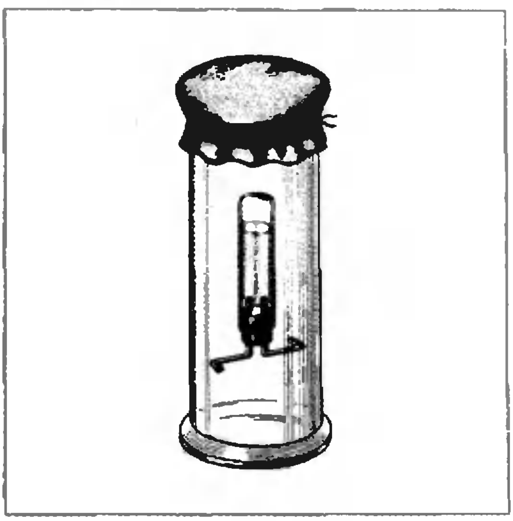
Рис. 6.

Ф. Вафин

Еще раз о реакции вытекающей и втекающей струй

В сентябре 1978 года в нашем журнале была опубликована статья В. Майера «Реакция вытекающей и втекающей струй». Редакция получила много откликов на нее. Предлагаем вашему вниманию еще одну статью на ту же тему. В ней рассказывается о том, как сделать прибор, называемый «морским жителем» или «картезианским водолазом», и как с его помощью наглядно продемонстрировать наличие реакции вытекающей струи и отсутствие реакции втекающей струи.

Возьмите стеклянную пробирку диаметром около 2 см, заполните ее водой приблизительно на 3/4 объема и закройте пробкой. В пробку вставьте две изогнутые трубочки, образующие сегнерово колесо. Трубочки можно изготовить самим, например из пустых стержней для шариковой авторучки, слегка нагревая места изгиба.



Пробирку опустите вверх дном в высокий цилиндрический сосуд (скажем, в трехлитровую банку), целиком заполненный водой (см. рисунок). Количество воды в пробирке отрегулируйте так, чтобы пробирка плавала в сосуде. Удобнее всего лишнюю воду из пробирки выливать через одну из трубочек (сама пробирка при этом расположена горизонтально). Когда отрегулируете количество воды в пробирке, отверстие сосуда затяните тонкой (но прочной) резиновой пленкой.

Теперь можно приступать непосредственно к опыту. Надавите пальцами на пленку, и вы увидите, что пробирка начнет опускаться, не вращаясь. Снимите пальцы с пленки — пробирка будет подниматься и при этом вращаться. Как это можно объяснить?

Когда пробирка плавает, ее сила тяжести уравновешена выталкивающей силой. Если надавить на пленку, гидростатическое давление в сосуде увеличится, а давление воздуха в пробирке останется прежним. Под действием разности давлений вода через изогнутые трубочки будет входить в пробирку, объем воздуха над водой в пробирке будет уменьшаться, а давление — увеличиваться. Поскольку количество воды в пробирке возрастет, увеличится ее сила тяжести, а выталкивающая сила не изменится. В результате пробирка начнет тонуть, но вращаться она не будет. Это явно свидетельствует об отсутствии реакции *втекающей* струи.

При снятии пальцев с пленки гидростатическое давление в сосуде примет свое первоначальное значение, и под действием избыточного давления воздуха в пробирке часть воды из пробирки вытечет. Став легче, пробирка начинает всплывать, вращаясь при этом под действием реакции *вытекающей* струи.

Г. Гегелия

Принцип сжимающих отображений

(Из хроники НОУ)

Настоящая статья основана на докладе, сделанном ее автором — тогда десятиклассником — на «Празднике математики» в Батуми. В ней рассказывается об одной важной теореме, которая в наше время часто применяется при решении больших систем на ЭВМ, но может быть использована и для приближенного нахождения корней «типично школьных» уравнений.

Неподвижные точки

Пусть f — отображение произвольного множества A в себя. Точка $x \in A$ называется *неподвижной точкой*[*1] отображения f, если

$$f(x) = x. \qquad (1)$$

Когда $A \subset \mathbf{R}$ (то есть когда f — обычная числовая функция), найти неподвижную точку отображения f попросту означает решить уравнение (1). Обратно, если дано любое уравнение $g(x) = 0$, то его решение будет неподвижной точкой отображения f, где

$$f(x) = g(x) + x. \qquad (2)$$

Рассмотрим несколько примеров.

1) Поворот плоскости на ненулевой угол около данной точки имеет единственную неподвижную точку (центр поворота).

2) Параллельный перенос плоскости на ненулевой вектор не имеет неподвижной точки.

3) Симметрия плоскости относительно прямой имеет бесконечное множество неподвижных точек (все точки этой прямой).

4) Отображение $x \to ax^2 + bx + c$, где $a \neq 0$, имеет две, одну или ни одной неподвижной точки в зависимости от знака выражения

$$\Delta = (b-1)^2 - 4ac.$$

З а д а н и е 1. *Постройте отображение плоскости на себя, имеющее ровно n неподвижных точек* ($n \in \mathbf{N}$).

Сжимающие отображения

Как мы заметили выше, решение любого уравнения вида $g(x) = 0$ простым приемом (прибавлением x к левой части уравнения) сводится к нахождению неподвижной точки некоторого отображения. Поэтому очень важно знать условие, при котором неподвижная точка существует, а также уметь находить саму неподвижную точку. Такое условие мы сейчас укажем.

Пусть дано отображение $f: A \to A$, где в множестве A определено расстояние между точками: $d(x, y)$; (например, A — подмножество прямой, плоскости или пространства). Отображение f называется *сжимающим*, если существует такое число $\alpha < 1$, что для любых точек x, y A

$$\alpha d(x, y) \geqslant d(f(x), f(y)). \qquad (3)$$

Иными словами, расстояние между образами точек меньше, чем расстояние между самими точками, причем оно уменьшается по крайней мере в α «раз», где $\alpha < 1$. Число α называется *коэффициентом сжатия*. Примеры:

1) Гомотетия плоскости с коэффициентом $0 < k < 1$ будет сжимающим отображением (с коэффициентом сжатия k).

2) Поворот плоскости не является сжимающим отображением. Следующая теорема показывает, зачем нужно понятие сжимающего отображения.

Т е о р е м а (принцип сжимающих отображений на прямой). *Вся-*

[*1] О неподвижных точках рассказывается также в статье Б. Вертгейма («Квант», 1980, № 6).

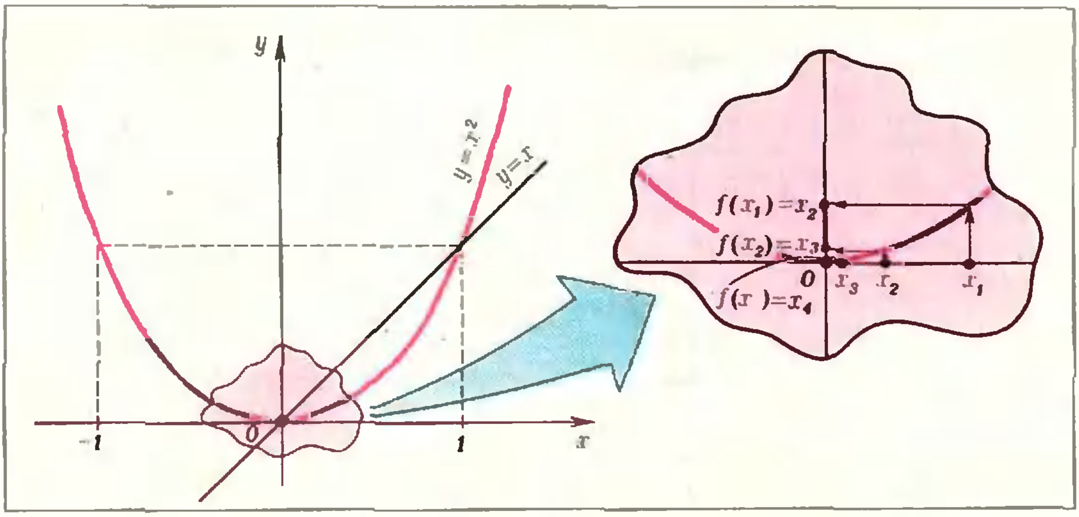


Рис. 1.

кое сжимающее отображение f: $]a;\ b[\to]a;\ b[$ интервала в себя имеет единственную неподвижную точку.

Единственность неподвижной точки очевидна: если бы их было две, то расстояние между ними должно было бы измениться (по условию (3)), в то время как оно на самом деле остается неизменным (ибо сами точки не двигаются).

Доказательство существования основано на простом, но важном *методе итераций*: берем любую точку $x_0 \in]a;\ b[$ и многократно применяем к ней f:

$$x_0,\ x_1=f(x_0),\ x_2=f(x_1),\ \ldots,\ x_n=f(x_{n-1}),\ \ldots \qquad (4)$$

тогда последовательность $x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n,\ \ldots$ сходится к искомой неподвижной точке.

Прежде чем обосновать этот метод (то есть завершить доказательство теоремы), мы проиллюстрируем его на простейшем примере: Пусть $f:]-1;\ 1[\to]-1;\ 1[$ — отображение, заданное формулой $f(x)=x^2$ (рис. 1). Возьмем точку $x_0=0,1$. Тогда

$$x_1=(0,1)^2=0,01,$$
$$x_2=(0,01)^2=0,0001,\ \ldots$$

Очевидно, $\lim\limits_{k\to\infty} x_k=0$. Точка 0 действительно неподвижна, ибо $0^2=0$. (Кстати, этим способом мы решили уравнение $x^2-x=0$, $x \in]-1;\ 1[$).

Возвращаясь к доказательству теоремы, обозначим через (x_n) последовательность (4). Покажем, что эта последовательность обладает следующим свойством.

(К) *Для любого $\varepsilon>0$ существует такой номер n_0, что для всех бо́льших номеров $n, m>n_0$ выполняется неравенство*

$$d(x_{n,m})<\varepsilon. \qquad (5)$$

Иными словами, точки последовательности с достаточно большими номерами сколь угодно близки.

Чтобы это доказать, применим k раз неравенство (3); получим

$$d(x_k,\ x_{k+1})\leqslant\alpha^{k-1}d(x_1,\ x_2).$$

Поэтому

$$d(x_n,\ x_{n+p})\leqslant d(x_n,\ x_{n+1})+$$
$$+d(x_{n+1},\ \ x_{n+2})+\ldots+d(x_{n+p-1},x_{n+p})\leqslant$$
$$\leqslant(\alpha^{n-1}+\alpha^n+\ldots+\alpha^{n+p-2})d(x_1,x_n)=$$
$$=\frac{\alpha^{n-1}(1-\alpha)^p}{1-\alpha}d(x_1,\ x_n)\leqslant$$
$$\leqslant\frac{\alpha^{n-1}}{1-\alpha}d(x_1,\ x_2). \qquad (6)$$

Теперь для любого данного нам $\varepsilon>0$ мы в качестве n_0 можем взять

$$n_0=\log_\alpha\frac{\varepsilon(1-\alpha)}{d(x_1,\ x_2)}.$$

Тогда для любых $n,\ m>n_0$ из неравенства (6) сразу следует нужное

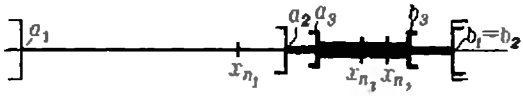


Рис. 2.

нам неравенство (5) (проверьте!). Свойство (К) доказано.

Пользуясь свойством (К), докажем теперь сходимость последовательности (x_n). Для числа $\varepsilon = 1/2$, по свойству (К), найдется такой номер n_1, что при $m > n_1$ выполняется $d(x_m, x_{n_1}) < 1/2$, то есть $x_m \in]a_1;\ b_1[$, где $a_1 = x_{n_1} - 1/2$, $b_1 = x_{n_1} + 1/2$. Рассмотрим далее число $\varepsilon = 1/4$ и аналогично найдем такой номер n_2, что при $m > n_2$ выполняется $x_m \in]a_2;\ b_2[$, где $a_2 = x_{n_2} - 1/2$, $b_2 = x_{n_2} + 1/2$. Если одна из точек a_2, b_2 не лежит в $]a_1;\ b_1[$, то мы ее заменим на a_1 (соответственно b_1), сохранив обозначение $]a_2;\ b_2[$ для построенного отрезка. И так далее (см. рис. 2).

Получим последовательность интервалов

$$]a_1;\ b_1[\ \supset\ ]a_2;\ b_2[\ \supset \ldots \supset\ ]a_n;\ b_n[\ \supset \ldots$$

длина n-го интервала не превосходит $1/2^{n-1}$, и для каждого из них существует такой номер, что все x_i с бо́льшими номерами лежат в этом интервале.

Рассмотрим последовательность (a_n) левых концов наших интервалов. Она возрастает и ограничена сверху (например, числом b_1) и, следовательно (см. «Алгебра и начала анализа 9», п. 32), имеет предел $x = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$. Покажем, что это же число x является пределом последовательности (x_n). Действительно,

$$d(x, x_n) \leqslant d(x, a_n) + d(a_n, x_n);$$

оба слагаемых в правой части сколь угодно малы (при достаточно больших n), стало быть $d(x, x_n)$ сколь угодно мало (при достаточно больших n), то есть $x = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

Нам осталось только доказать, что x — неподвижная точка отображения f. Имеем

$$\begin{aligned} 0 \leqslant d(x, f(x)) &\leqslant d(x, x_n) + \\ &+ d(x_n, f(x)) = d(x, x_n) + \\ &+ d(f(x_{n-1}), f(x)) \leqslant d(x, x_n) + \\ &+ \alpha d(x_{n-1}, x). \end{aligned}$$

Последние два слагаемых сколь угодно малы (при достаточно больших n), значит, $d(x, f(x)) = 0$, то есть $f(x) = x$, что и требовалось доказать.

Легко видеть, что теорема останется верной, если интервал $]a;\ b[$ мы заменим отрезком, лучом или даже всей прямой **R**. Более того, она остается верной и на плоскости.

З а д а н и е 2. *Сформулируйте и докажите принцип сжимающих отображений для круга на плоскости.*

У к а з а н и е. Воспользуйтесь координатами.

Если вы проделали это упражнение, вам, конечно, ясно, что наш принцип остается верным для полуплоскости или полосы и даже в пространстве — скажем, для шара. Естественно спросить: а как сформулировать этот принцип с тем, чтобы охватить как можно больше случаев? Как найти наиболее общую формулировку?

Поставив этот вопрос, мы попали в ситуацию, характерную для творческой работы математика-исследователя. И сейчас мы посмотрим

Как рассуждает математик

Математик-профессионал здесь стал бы думать примерно так:

Нам нужно найти формулировку, обобщающую доказанную выше теорему. Чтобы сделать это, посмотрим, *какие именно свойства данной ситуации на самом деле потребовались при доказательстве.*

Во-первых, мы пользовались определением сжимающего отображения (3). Значит, в множестве A должно быть определено расстояние $d(x, y)$ между точками $x, y \in A$. Конкретно, расстояние между точками x, y *на прямой* — это число

$$d(x, y) = |x - y|.$$

Но важно ли, что оно задается именно так? Наверное, нет: ведь на плоскости $d(x, y)$ определено иначе, а доказательство все же проходит. Стало быть, нужно смогреть, *какие свойства расстояния* на самом деле используются. Посмотрим.

В конце доказательства мы пользовались тем, что две точки, находящиеся на нулевом расстоянии, совпадают. Запишем это так:

$$d(x, y)=0 \Leftrightarrow x=y. \qquad (\text{I})$$

Далее нам было нужно (где?), чтобы

$$d(x, y)=d(y, x) \qquad (\text{II})$$

(для любых $x, y \in A$).

Наконец, мы неоднократно (например, при доказательстве неравенства (6)) пользовались *неравенством треугольника:*

$$d(x, z) \leqslant d(x, y)+d(y, z) \quad (\text{III})$$

(для любых $x, y, z \in A$).

Теперь подумаем — какие-нибудь другие свойства расстояния нам были нужны? Просмотрим еще раз доказательство: нет, от расстояния больше ничего не требуется. Таким образом, нам нужны лишь обычные аксиомы расстояния.

Пойдем дальше. Проследим, как была доказана сходимость последовательности (4), обладающей свойством (К). Довольно хитро, с использованием специфических свойств интервалов на прямой. Понять, какие именно общие свойства здесь использованы, трудно. Остается только один выход: «убрать трудность в аксиому», то есть постулировать, что всякая последовательность, обладающая свойством (К), сходится. Ведь это сделать очень просто — *достаточно ограничиться теми множествами A, для которых из условия (К) следует сходимость!*

Подведем итог. Доказательство проходит для сжимающего отображения, если в A есть расстояние, удовлетворяющее условиям (I)—(III), причем любая последовательность точек из A, обладающая свойством (К), сходится к точке из A.

Формулировка в общем случае

Чтобы сформулировать нужную нам теорему, начнем с формальных определений. Читатель, разобравшийся в рассуждениях нашего выдуманного математика-профессионала, сразу поймет, почему эти определения именно такие.

Множество A, на котором каждой паре точек $x, y \in A$ сопоставлено число $d(x, y) \in \mathbf{R}$, называется *метрическим пространством*, если для d выполнены условия (I)—(III); при этом число $d(x, y)$ называется *расстоянием* между точками x и y.

Последовательность точек $x_1, x_2, \ldots, x_k, \ldots$ метрического пространства A называется *фундаментальной* (или *последовательностью Коши*), если для любого $\varepsilon>0$ существует такой номер n_0, что

$$n, m>n_0 \Rightarrow d(x_n, x_m)<\varepsilon.$$

Последовательность (x_n) в метрическом пространстве A называется *сходящейся*, если существует точка x, такая что для любого $\varepsilon>0$ найдется номер n_0, для которого

$$n>n_0 \Rightarrow d(x_n, x)<\varepsilon.$$

Точка x в этом случае называется *пределом* последовательности x_n. Обозначение: $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=x$.

Наконец, метрическое пространство называется *полным*, если любая фундаментальная последовательность в нем сходится.

Теорема (общий принцип сжимающих отображений). *Любое сжимающее отображение полного метрического пространства в себя имеет единственную неподвижную точку.*

Доказательство по существу не отличается от доказательства первой теоремы, только конец проще: из того, что последовательность (4) фундаментальна (то есть обладает свойством (К)), и из полноты пространства A по определению следует, что (4) сходится.

Задание 3. *Напишите доказательство подробно.*

На самом деле, принцип сжимающих отображений, который обычно связывают с именами Пикара и Банаха, сформулирован выше не в самом общем виде. Более тонкий анализ доказательства привел польского математика С. Банаха к понятию *полного нормированного линейного пространства* (или как сейчас говорят, *банахова пространства*), для которого теорема им и была доказана. Преимущество этой формулировки в том, что «точками» такого пространства могут быть *функции*, так что принцип становится применимым к решению, например, дифференциальных уравнений.

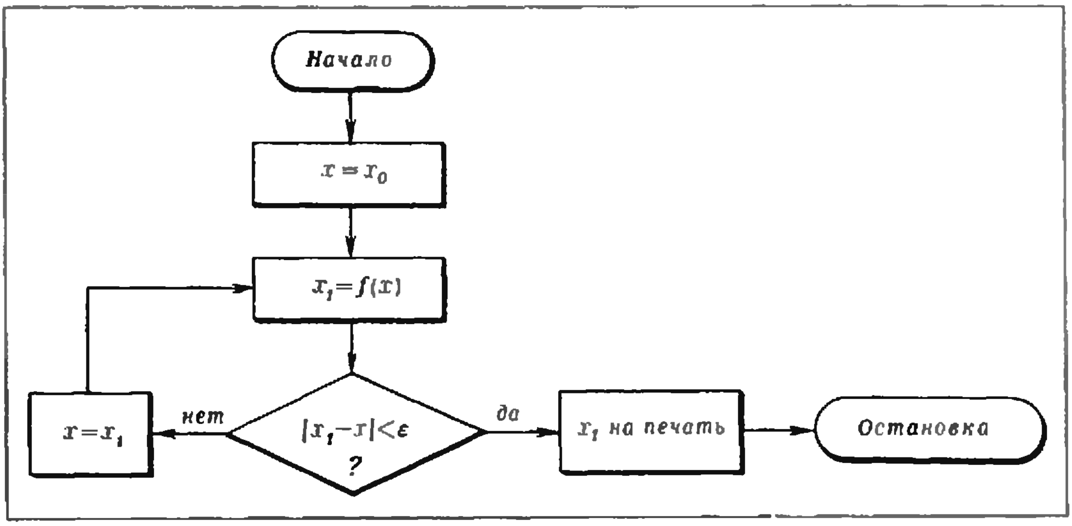


Рис. 3.

Как работает ЭВМ

Мы уже отмечали, что метод итераций дает нам способ приближенного нахождения неподвижной точки: так как последовательность x_0, $x_1=f(x_0)$, $x_2=f(x_1)$, ... сходится к x, точку x можно получать с заданной точностью ε, выбрав номер n так, чтобы $|x_n-x|<\varepsilon$.

Это прекрасно может сделать компьютер, действующий по алгоритму, показанному на рисунке (так называемой «блок-схеме» алгоритма). Посмотрите на него внимательно и поймите, как действует этот алгоритм.

Ясно, что в условиях теоремы о сжимающих отображениях машина после конечного числа итераций выдаст на печать число x_n, удовлетворяющее условию $|x_n-x|<\varepsilon$, то есть приближенное (с заданной точностью ε) значение x. Если же эти условия не выполнены, машина может «работать вечно» (если она не сломается, так и не выдав нам ответа).

Чтобы зря не тратить дорогостоящее машинное время, целесообразно, прежде чем запустить алгоритм, проверить выполнение условий теоремы о сжимающих отображениях.

З а д а н и е 4. *Применить описанный выше алгоритм для приближенного решения уравнения*

$$g(x)=x^3+3x+x\cos^2 x-\sin(\cos x)=0.$$

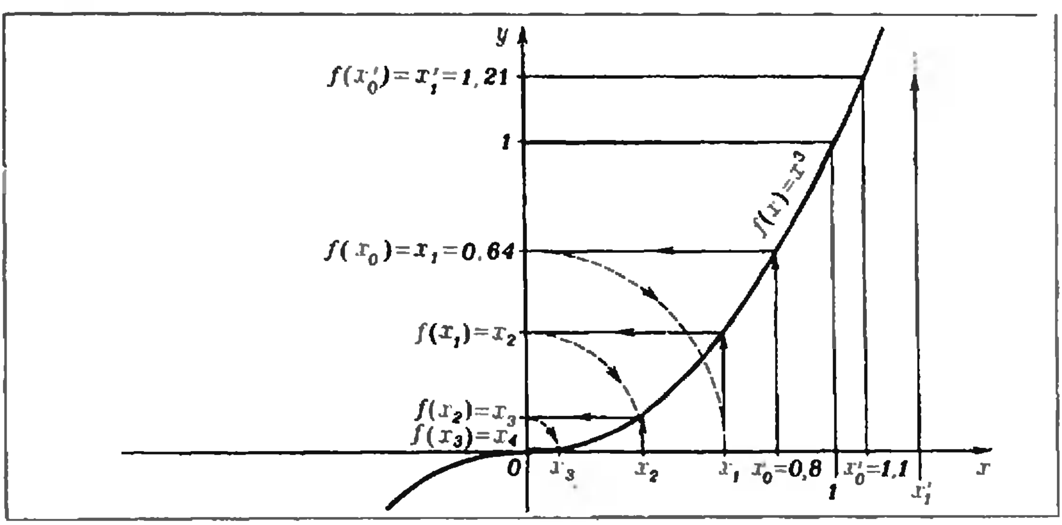


Рис. 4.

точнее, для нахождения неподвижной точки отображения f, где $f(x)=g(x)+x$. Взять при этом $\varepsilon=0{,}01$, $x_0=0$.

Задание 5. *Выяснить, что будет, если алгоритм применить к отображению $f(x)=x^3$. Рассмотрите случаи $x_0=0{,}8$ и $x_0=1{,}1$, $\varepsilon=0{,}1$* (рис. 4)

Задание 6*. *Покажите, что существует отображение прямой, сближающее все точки (то есть удовлетворяющее условию $d(x, y)>d(f(x), f(y))$), но не обладающие неподвижной точкой.*

Задание 7 (для учащихся Заочной школы программирования). *Напишите программу на Рапире для выполнения задания 4.*

Вместо заключения — геометрия

Принцип сжимающих отображений применим не только для приближенного решения уравнений. Рассмотрим такую красивую геометрическую задачу (ср. М573):

На плоскости даны n прямых l_1, l_2, ..., $l_n (n\geqslant 2)$. Пусть $A_1\in l_1$; спроектируем перпендикулярно A_1 на l_2 в точку A_2, A_2 на l_3 в точку A_3, ..., A_n на l_1 в точку A_{n+1}. Можно ли найти такую точку $A_1\in l_1$, чтобы $A_{n+1}=A_1$?

Ответ. Такая точка существует и единственна.

Решение. Неужели вы не угадали?

Список читателей, приславших правильные решения задач из Задачника «Кванта»

(Начало см на с 21)

85а), б); *Е Поляков* (Калининград Московской обл) **91**; *В Радченко* (Киев) **84, 85а), б), 91, 94, 96, 00**; *Ю Рачинский* (Москва) **85б)**; *И Ройзман* П г т Калиновка Винницкой обл) **84, 94, 00**; *В Романюк* (с Куснище Волынской обл) **94**; *Б Рублев* (Киев) **91, 94, 96—98, 00**; *К Рухадзе* (Москва) **91, 94, 95, 98, 00**; *Э Салимов* (Кировобад) **91**; *И Сафаров* (Ленкорань) **91**; *И Сильванович* (Ангарск) **97**; *М Слинкин* (Москва) **98, 00**; *А Смирнов* (Курган) **98**; *А Соловьев* (Ленинград) **91, 94, 96, 99, 00**; *А Спивак* (Стерлитамак) **91, 95, 96, 98—00**; *С Спичак* (Припять Киевской обл) **98**; *С Стадниченко* (Пенза) **94, 95**; *И Стойменович* (СФРЮ) **96, 98—00**; *Д Суворов* (Свердловск) **98**; *В Тарунин* (Пермь) **84, 94, 96, 98, 00**; *Л Тепер* (с Ялтушков Винницкой обл) **96, 98**; *В Титенко* (д Блужа Минской обл) **00**; *Р Угриновский* (Хмельник) **91, 94, 97—99**; *А Уливанов* (Горький) **98, 00**; *О Фонарев* (Сумгаит) **91**; *А Харитонский* (Киев) **91, 98**; *А Херольянц* (Тула) **00**; *С Хомич* (Ангарск) **00**; *С Хосид* (Алма-Ата) **91, 94**; *В Цекановский* (Донецк) **85а), 91, 94**; *А Чернышов* (Москва) **98**; *О Чечель* (Москва) **85а), б), 91, 94**; *Н Шаромет* (Москва) **84, 96, 98, 00**; *Ю Шинкарь* (Киев) **98**; *Н Широкова* (Казань) **84**; *А Шихкеримов* (Сумгаит) **91**; *С Шмелев-Агинский* (Москва) **84, 85а), б), 98, 99**; *Ф Эрдманн* (ГДР) **91**; *В Ясинский* (Могилев-Подольский) **91**.

Физика

Почти все читатели, приславшие решения задач **Ф588—Ф602**, справились с задачами **Ф588, Ф592** и **Ф598**. Остальные задачи правильно решили. *А Абрамочкин* (Киев) **89**; *А Авакянц* (Донецк) **93—97**; *В Аветисов* (Баку) **93, 96, 99**; *А Алиев* (Кировабад) **94**; *И Аполонский* (Жуковский) **94, 95, 97**; *М Арасланов* (Запорожье) **99, 02**; *А Бабаев* (Баку) **93, 96, 99**; *Р Бабаев* (Баку) **95—97, 99, 00, 02**; *О Барабаш* (Киев) **01**; *Г Басс* (Теплогорск Ворошиловградской обл) **94**; *В Белоус* (Днепропетровск) **95, 99**; *В Бережной* (Киев) **99**; *А Бессарабский* (п Запрудня Московской обл) **89, 90, 93, 95—97**; *И Бессонов* (Реутов) **89, 95—97, 00**; *А Божко* (Алма-Ата) **89, 94—96**; *А Бойко* (Киев) **94**; *И Боровиков* (Красноярск) **94, 96, 97**; *А Бочек* (Харьков) **90**; *Л Брагинский* (Киев) **94—97, 00, 01**; *С Вагнер* (Джезказган) **89, 93—96, 00, 01**; *В Васильев* (Великие Луки) **94—97, 99, 00**; *В Вачев* (Ямбол, НРБ) **99**; *Б Вейцман* (Одесса) **87, 89, 91, 94—97, 01**; *Е Войтенко* (Киев) **94, 95, 97, 00**; *А Вольнов* (Киев) **93, 94**; *В Ворона* (Славянск) **93—97, 99, 00, 02**; *Е Выродов* (Подольск) **89, 93, 95—97, 99, 01, 02**; *Р Габдуллин* (д Старо Баишево БашАССР) **99**; *Г Гаев* (Саратов) **93, 94**; *В Галинский* (Еманжелинск) **01**; *В Гладков* (Москва) **00—02**; *С Голощапов* (Запорожье) **89, 90, 93—97**; *В Горбунов* (Коммунарск) **89—91, 92—97, 99, 00, 02**; *Е Горохов* (Киев) **93—97**; *А Градинер* (Баку) **95**; *А Григоренко* (Макеевка Донецкой обл) **95—97, 00—02**; *Н Григорук* (Ровно) **96**; *Д Григорьев* (Москва) **95, 96, 99, 00, 02**; *Г Григорян* (Москва) **99**; *И Грузберг* (Пермь) **91, 93—95, 99**; *И Губин* (Ереван) **94, 95, 02**; *А Гуляев* (Москва) **95, 97**; *А Давоян* (Ленинакан) **95, 97**; *И Даниловский* (Горький) **90, 91, 93—96, 99, 00**; *Т Демьянков* (Ровно) **94, 96**; *С Джикелов* (Алма-Ата) **01**; *Т Дограшвили* (Кутаиси) **99**; *С Долгополов* (Полтава) **90**; *А Долинин* (Владимир) **94, 96**; *А Дремин* (п Черноголовка Московской обл) **93—97, 02**; *О Дрямин* (Ижевск) **95, 96**; *Ю Елисеев* (Великие Луки) **93—96, 99, 00, 02**; *И Елишевич* (Чернигов) **93—96**.

(Продолжение см на с 46)

Задачник Кванта

Задачи

М641—М645; Ф653—Ф657

Этот раздел ведется у нас из номера в номер с момента основания журнала. Публикуемые в нем задачи не стандартны, но для их решения не требуется знаний, выходящих за рамки нынешней школьной программы. Наиболее трудные задачи отмечаются звездочкой. После формулировки задачи мы обычно указываем, кто нам ее предложил. Разумеется, не все эти задачи публикуются впервые. Решения задач из этого номера можно отправлять не позднее 15 ноября 1980 года по адресу: 113035, Москва, М-35, Б. Ордынка 21/16, редакция журнала «Квант». В графе «Кому» напишите: «Задачник «Кванта» № 9—80» и номера задач, решения которых вы посылаете, например «М641, М642» или «Ф653». Решения задач из разных номеров журнала или по разным предметам (математике и физике) присылайте в разных конвертах. В письмо вложите конверт с написанным на нем вашим адресом (в этом конверте вы получите результаты проверки решений). Условие каждой оригинальной задачи, предлагаемой для публикации, присылайте в отдельном конверте, в двух экземплярах, вместе с вашим решением этой задачи (на конверте пометьте: «Задачник «Кванта», новая задача по физике» или «... новая задача по математике»).

М641. Дан правильный шестиугольник $ABCDEF$ с центром O. Точки M и N — середины сторон CD и DE. Прямые AM и BN пересекаются в точке L. Докажите, что:

а) треугольник ABL и четырехугольник $DMLN$ имеют равные площади;

б) $\widehat{ALO}=\widehat{OLN}=60°$;

в) $\widehat{OLD}=90°$.

Э. Готман

М642. Докажите, что каждое натуральное число представляется в виде $a_0+2a_1+2^2a_2+\ldots+2^na_n$, где каждое из чисел a_k равно 0, -1 или 1 и $a_k\cdot a_{k+1}=0$ для всех $0\leqslant k\leqslant n-1$, причем такое представление единственно.

Н. Жук

М643. Карточки с числами 1, 2, ..., 32 сложены в стопку по порядку. Разрешается снять сверху любое число карточек и вложить их между некоторыми из оставшихся или под ними, не меняя порядка тех и других, а в остальном произвольно. Эта операция называется *перемешиванием*. Докажите, что за 5 перемешиваний можно

а) переложить карточки в обратном порядке;

б) разложить карточки в любом порядке;

в) докажите, что не всякий порядок карточек можно получить за 4 перемешивания.

В. Турчанинов

М644. а) Докажите, что существует выпуклый 1980-угольник со сторонами длины 1, 2, ..., 1980, все углы которого равны по величине.

б) Существует ли такой 1981-угольник?

Г. Гуревич

М645. В подвале три коридора (рисунок 1; $|OA|=|OB|=|OC|=l$), все выходы из которых закрыты. В нем находятся инспектор Варнике и преступник. Варнике замечает преступника, если расстояние между ними не превосходит r. Он знает, что максимальная скорость преступника в два раза меньше его собственной максимальной скорости. В начальный момент инспектор находится в точке O и не видит преступника. Как

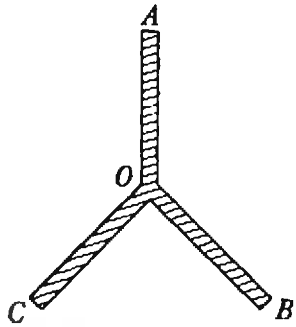


Рис. 1.

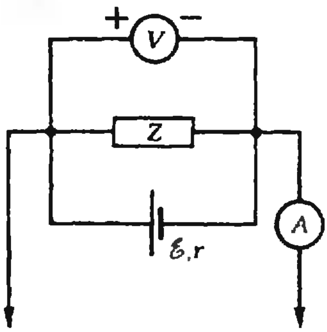


Рис. 2.

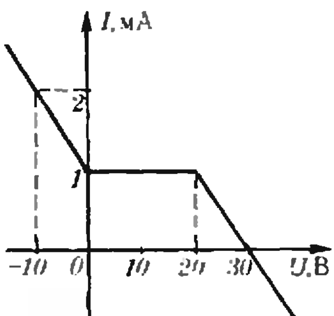


Рис. 3.

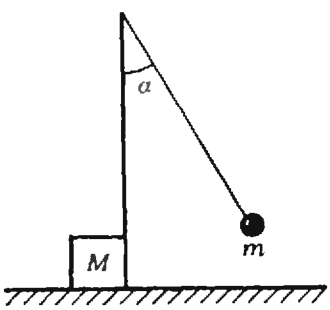


Рис. 4.

должен действовать Варнике, чтобы наверняка поймать преступника, если а) $r=l/3$, б) $r=l/4$, в)* $r>l/5$, г)* $r>l/7$. Шириной коридоров и размерами людей пренебречь. (Варнике должен придумать такой план действий, чтобы, даже если преступник о нем заранее знает, он все равно не смог ускользнуть.)

В. Ирифельд, В. Соколов

Ф653. Некоторый элемент Z, соединенный с батареей с ЭДС $\mathscr{E}=10$ В и внутренним сопротивлением $r=10$ кОм, подключен к внешнему источнику тока так, как показано на рисунке 2. Вольтамперная характеристика такой цепи показана на рисунке 3. Постройте вольтамперную характеристику элемента Z.

В. Можаев

Ф654. Штатив массы M стоит на гладком столе. К штативу на легкой нити длины l прикреплен шарик массы m. Нить отклоняют на малый угол α и отпускают (рис. 4). Нарисовать график зависимости скорости штатива от времени. Столкновения шарика с основанием штатива абсолютно упругие.

А. Зильберман

Ф655. В настоящее время используются соленоиды со сверхпроводящей обмоткой. Такие соленоиды могут длительное время создавать магнитное поле без затраты энергии. Однако, если вследствие каких-либо причин участок обмотки соленоида утратит сверхпроводящие свойства, произойдет авария. На этом участке током будет выделяться большое количество тепла и произойдет взрыв. Придумайте простейшее приспособление, исключающее подобные аварии (не пытайтесь придумывать какие-либо схемы с реле, размыкающим цепь,— они не помогут).

Г. Мякишев

Ф656. Прямоугольный кузов самосвала заполнен песком. Высота кузова $h=1$ м, его ширина $d=3$ м, длина $l=6$ м. Какая сила действует на задний борт самосвала при равномерном движении автомобиля и при его движении с ускорением $a=3$ м/с^2? Плотность песка $\rho=1{,}5\cdot10^3$ кг/м^3, коэффициент трения между песчинками $\mu=0{,}6$.

И. Слободецкий

Ф657. Радиусы кривизны двух одинаковых слипшихся друг с другом мыльных пузырей равны R. После того как перегородка между пузырями лопнула, образовался один пузырь радиуса R_1. Найти атмосферное давление. Коэффициент поверхностного натяжения мыльного раствора равен σ.

Решения задач

М596, М598, М599; Ф599—Ф603

М596. *Дана пятиугольная призма с основаниями $A_1A_2A_3A_4A_5$ и $B_1B_2B_3B_4B_5$. Все ребра оснований и все отрезки A_iB_j ($i, j = 1, 2, 3, 4, 5$) окрашены либо в красный, либо в синий цвет так, что в каждом треугольнике с вершинами в вершинах призмы, стороны которого окрашены, есть две стороны разного цвета. Докажите, что все десять ребер оснований окрашены одинаково.*

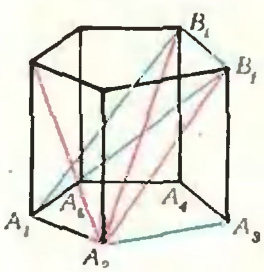


Рис. 1.

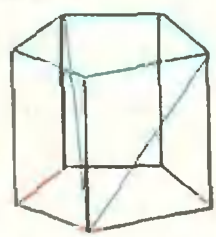


Рис. 2.

Сначала докажем, что все ребра нижнего основания окрашены в один и тот же цвет. Действительно, пусть найдутся два ребра нижнего основания, окрашенных в разные цвета, тогда на нижнем основании найдутся два смежных ребра, окрашенных в разные цвета (рис. 1). Можно считать, что это ребра A_1A_2 и A_2A_3, причем первое ребро окрашено в красный цвет, а второе — в синий. Из пяти отрезков A_2B_k ($k = 1, 2, \ldots, 5$) по крайней мере три окрашены в одинаковый цвет, будем считать, что этот цвет — красный. Из трех вершин на верхнем основании, в которые ведут эти отрезки, найдутся две соседние вершины. Обозначим их через B_i и B_j. Очевидно, ребро B_iB_j должно быть синим, иначе в треугольнике $A_2B_iB_j$ все ребра были бы окрашены в красный цвет (см. рис. 1). Синим должен быть и отрезок A_1B_i, иначе все стороны треугольника $A_1A_2B_i$ были бы окрашены в красный цвет. Отрезок A_1B_j тоже должен быть синим, чтобы все стороны треугольника $A_1A_2B_j$ не были красными. Но в таком случае все стороны треугольника $A_1B_iB_j$ будут синими. Получили противоречие.

Аналогично доказывается, что и ребра верхнего основания окрашены одинаково.

Предположим теперь, что ребра нижнего основания окрашены в красный цвет, а ребра верхнего основания — в синий. Тогда из любой вершины нижнего основания выходит не более двух отрезков синего цвета (в противном случае два синих отрезка, выходящих из одной вершины нижнего основания, будут оканчиваться в соседних вершинах верхнего основания, образуя с соединяющим их отрезком «синий» треугольник — см. рис. 2). Таким образом, из отрезков A_iB_j не более чем $2 \cdot 5 = 10$ синих. Аналогичные рассуждения, проведенные с другим основанием, показывают, что красных отрезков тоже не больше десяти. Но всего отрезков A_iB_j, как не трудно посчитать, 25, а мы получили, что их не более двадцати. Противоречие. Тем самым мы и доказали, что все ребра обоих оснований призмы окрашены в один и тот же цвет.

Отметим, что утверждение задачи верно для любой призмы с нечетным числом вершин при основании и неверно для призмы с четным числом вершин при основании (приведите пример).

А. Савин

М598. *Даны плоскость π, точка P на этой плоскости и точка Q вне плоскости π. Найдите все точки R в плоскости π, для которых отношение $(|PQ| + |PR|)/|QR|$ максимально.*

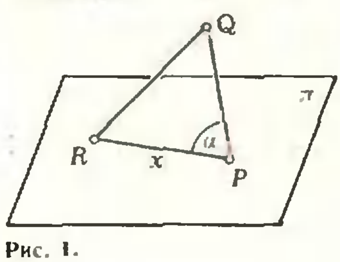


Рис. 1.

Обозначим через x расстояние от точки P до точки R и положим $\alpha = \widehat{QPR}$ (рис. 1). Тогда указанное в задаче отношение запишется так:

$$\frac{x+|PQ|}{\sqrt{x^2+|PQ|^2-2x|PQ|\cos\alpha}}. \qquad (*)$$

Заметим, что при фиксированном x это отношение будет максимально, когда максимален $\cos\alpha$, а это произойдет в том случае, когда плоскость $\widehat{PQR}$ будет перпендикулярна плоскости π (рис. 2). Следовательно, можно считать, что плоскость PQR перпендикулярна плоскости π, а $\angle QPR$ — угол между прямой PQ и плоскостью π.

Выражение (*) максимально одновременно с его квадратом $\frac{(x+|PQ|)^2}{x^2+|RQ|^2-2x|PQ|\cos\alpha}$. Чтобы найти максимум этого выражения, продифференцируем его по x:

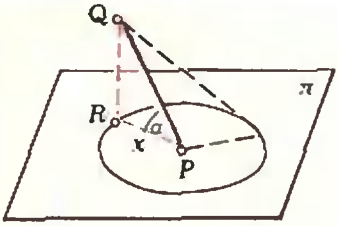


Рис. 2.

$$\left(\frac{(x+|PQ|)^2}{x^2+|PQ|^2-2x|PQ|\cos\alpha}\right)'=\frac{2(1+\cos\alpha)|PQ|(x^2-|PQ|^2)}{(x^2+|PQ|^2-2x|PQ|\cos\alpha)^2}.$$

и приравняем производную к нулю; получим, что $x=|PQ|$.

Таким образом, искомая точка R лежит на проекции прямой PQ на плоскость π на расстоянии $|PQ|$ от точки P по направлению к проекции точки Q.

В случае, если отрезок $|PQ|$ перпендикулярен плоскости π, из предыдущего следует, что точкой R может быть любая точка, лежащая на окружности радиуса $|PQ|$ с центром в точке P.

А. Савин

М599. а) *Сколькими нулями оканчивается число*

$$4^{5^4}+6^{5^4}?$$

б) *Укажите наибольшую степень числа 1979, на которую делится число*

$$1978^{1979^{1980}}+1980^{1979^{1978}}.$$

Вначале докажем индукцией по n следующее утверждение: *при любом натуральном $a>2$ и любом натуральном b*

$$(a+1)^{a^n}=1+k_na^{n+1}, \qquad (1)$$

где k_n — натуральное число, не делящееся на a (то есть $(a+1)^{a^n}-1$ делится на a^{n+1} и не делится на a^{n+2}), *и*

$$(b-1)^{b^n}=-1+l_nb^{n+1}, \qquad (2)$$

где l_n — натуральное число, не делящееся на b.

При $n=0$ это очевидно, а переход от n к $n+1$ осуществляется с помощью формулы Ньютона. Сделаем это для (1):

$$(a+1)^{a^{n+1}}=[(a+1)^{a^n}]^a=(1+k_na^{n+1})^a=$$
$$=1+ak_na^{n+1}+a^{2n+2}(k_n^2C_a^2+\ldots)=1+k_{n+1}a^{n+2},$$

где $k_{n+1}=k_n+a^n(k_n^2C_a^2+\ldots)$ не делится на a при $n>0$ по предположению индукции (случай $n=0$ разбирается отдельно; сделайте это самостоятельно).

Аналогично доказывается и соотношение (2).

Подставив теперь $a=b=1979$, получим, что $1978^{1978^{1980}}+1$ делится на 1979^{1981}, а $1980^{1979^{1978}}-1$ делится на 1979^{1979} и не делится на 1979^{1980}. Окончательно получаем, что максимальный показатель степени 1979, на которую делится число $1979^{1979^{1980}}+1980^{1979^{1978}}$, равен 1979.

Чтобы ответить на вопрос а) задачи, определим наибольшую степень пятерки, на которую делится число $4^{5^4}+6^{5^4}$. Положив $a=b=5$, получим, что $4^{5^4}+1$ делится на 5^7, а $6^{5^4}-1$ делится на 5^5 и не делится на 5^6, так что максимальная степень пятерки, на которую делится сумма $4^{5^4}+6^{5^4}$, равна 5^5. Далее легко видеть, что 4^{5^4} делится на $2^{5^4}>2^5$ и 6^{5^4} делится на $2^{5^4}>2^5$. Таким образом, число $4^{5^4}+6^{5^4}$ делится на $5^5\cdot 2^5=10^5$, причем на 5^6 уже не делится. Значит, число $4^{5^4}+6^{5^4}$ оканчивается пятью нулями.

А. Вайнтроб

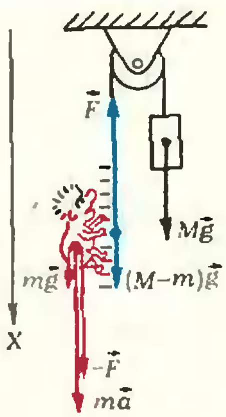
Ф599. *Через блок, укрепленный в потолке, перекинута веревка, на которой груз массы M уравновешен лестницей с человеком массы m. По какому закону должен двигаться человек относительно лестницы, чтобы реакция блока на потолок равнялась нулю? Блок невесом, веревка абсолютно гибка, нерастяжима и невесома.*

Реакция блока на потолок равна нулю, когда на блок не давит веревка, то есть когда сила натяжения веревки равна нулю. Это условие выполняется в том случае, когда груз M свободно падает, то есть движется вниз с ускорением $\vec{g}$. При этом лестница (вместе с человеком) движется вверх с ускорением $-\vec{g}$.

Поскольку сила натяжения веревки равна нулю, единственная сила, которая может сообщить лестнице ускорение, направленное вверх,— это сила $\vec{F}$, с которой на лестницу действует человек (см. рис.).

Запишем уравнения движения лестницы и человека в проекциях на ось X:

$$(M-m)g-F=-(M-m)g,$$
$$mg+F=-ma.$$



где $\vec a$ — ускорение, с которым движется человек относительно земли. Решая эти уравнения совместно, находим

$$a = \frac{2M}{m} g - g.$$

Относительно лестницы человек движется с ускорением

$$\vec a' = \vec a + \vec g = \frac{2M}{m}\vec g.$$

О. Овчинников

Ф600. *В схеме, приведенной на рисунке 1, ключ попеременно замыкают и размыкают в те моменты, когда напряжение на первом конденсаторе равно нулю. Нарисовать график зависимости напряжения на катушке индуктивности от времени.*

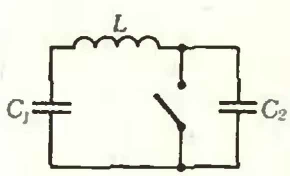


Рис. 1.

◆

При замкнутом ключе конденсатор C_1 и катушка образуют колебательный контур; напряжение на катушке и конденсаторе меняется со временем по гармоническому закону:

$$u = U_1 \sin \omega_1 t, \qquad (*)$$

где $\omega_1 = 1/\sqrt{LC_1}$ — частота колебаний, U_1 — амплитуда. Период T_1 колебаний напряжения (и тока) в этой цепи равен $2\pi/\omega_1 = 2\pi\sqrt{LC_1}$. Следовательно, напряжение и станет равным нулю в момент времени $t_1 = T_1/2 = \pi\sqrt{LC_1}$. В этот момент ток в цепи максимален и вся энергия контура заключена в магнитном поле катушки.

При размыкании ключа последовательно с конденсатором C_1 включается конденсатор C_2 и образуется колебательный контур с индктивностью L и емкостью $C = \frac{C_1C_2}{C_1+C_2}$. Напряжение на катушке в такой цепи меняется по закону

$$u = U_2 \sin \omega_2 (t - t_1),$$

где $\omega_2 = 1/\sqrt{LC} = \sqrt{\frac{C_1+C_2}{LC_1C_2}}$. Напряжение вновь обратится в нуль через половину периода колебаний, то есть в момент времени

$$t_2 = t_1 + \frac{T_2}{2} = \pi\left(\sqrt{LC_1} + \sqrt{L\frac{C_1C_2}{C_1+C_2}}\right).$$

Далее ключ замкнется, напряжение на катушке вновь будет меняться по закону (*).

Найдем соотношение между U_1 и U_2. В те моменты, когда напряжение на конденсаторе максимально, ток в контуре равен нулю и вся энергия сосредоточена в электростатическом поле конденсатора. Поэтому согласно закону сохранения энергии

$$\frac{C_1U_1^2}{2} = \frac{CU_2^2}{2},$$

откуда

$$U_2 = U_1\sqrt{\frac{C_1}{C}} = U_1\sqrt{1+\frac{C_1}{C_2}}.$$

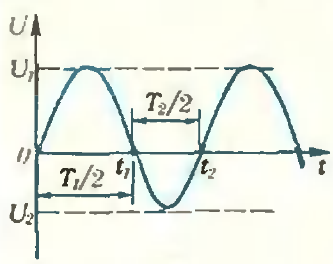


Рис. 2.

Теперь нетрудно построить график зависимости напряжения на катушке индуктивности от времени. Он показан на рисунке 2.

И. Слободецкий

Ф601. *На Луне в вертикальном цилиндре, закрытом тяжелым поршнем, находится аргон при температуре T_1.*

◆

Процесс происходит на Луне, поэтому внешним давлением можно пренебречь.

Изменение внутренней энергии газа равно работе внешней силы, действующей на газ. Эта сила — вес поршней.

Поршень может перемещаться в цилиндре без трения. На поршень кладут осторожно второй такой же поршень. Определите температуру T_2 газа при новом равновесном положении поршня. Теплоемкость поршня и цилиндра, а также теплоотдачу, не учитывать. Газ считается идеальным.

Так что

$$\frac{3}{2}\nu R(T_1-T_2)=2mg_л(h_2-h_1), \qquad (1)$$

где ν — количество молей газа в сосуде, m — масса одного поршня, $g_л$ — ускорение свободного падения на Луне, h_1 — начальная высота поршней, h_2 — конечная высота поршней.

Запишем уравнения состояний газа:

$$p_1V_1=p_1h_1S=\nu RT_1, \qquad (2)$$

$$p_2V_2=ph_2S=\nu RT_2, \qquad (3)$$

(S — площадь поперечного сечения сосуда). Давления p_1 и p_2 равны соответственно

$$p_1=\frac{mg_л}{S}, \quad p=\frac{2mg_л}{S} \qquad (4)$$

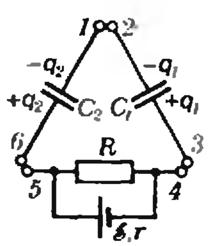
(это следует из условий равновесия поршней: $p_1S=mg_л$, $p_2S=2mg_л$).

Решая совместно уравнения (1) — (4), находим

$$T_2=1{,}4T_1.$$

♦

Ф602. *К цепи, состоящей из резистора с сопротивлением R и источника с ЭДС $\mathscr{E}$ и внутренним сопротивлением $r=R/3$, присоединяют конденсаторы с емкостями C_1 и C_2, замыкая клеммы 1—2, 3—4, 5—6 (см. рис.). После замыкания напряжение на конденсаторе C_1 оказывается равным $\mathscr{E}/2$, причем потенциал клеммы 3 выше потенциала клеммы 2. Определите, какой заряд q_0 был на конденсаторе C_2 до замыкания.*



При замыкании клемм произойдет перераспределение зарядов на пластинах конденсаторов (см. рис.). Заряд — q_0 распределится на верхних пластинах конденсаторов C_1 и C_2. По закону сохранения заряда

$$q_1+q_2=q_0.$$

Напряжение U между клеммами 4 и 5 равно IR, где $I=\dfrac{\mathscr{E}}{R+r}$, то есть

$$U=\frac{\mathscr{E}R}{R+r}=\frac{\mathscr{E}R}{R+R/3}=\frac{3}{4}\mathscr{E}.$$

Поскольку по условию задачи потенциал клеммы 3 выше потенциала клеммы 2, напряжение между клеммами 1 и 6 равно напряжению между клеммами 2 и 5. Запишем это равенство, выразив разности потенциалов через заряды и емкости конденсаторов:

$$\frac{q_2}{C_2}=\frac{q_1}{C_1}+\frac{3}{4}\mathscr{E}=\frac{1}{2}\mathscr{E}+\frac{3}{4}\mathscr{E}=\frac{5}{4}\mathscr{E},$$

поскольку по условию задачи $\dfrac{q_1}{C_1}=\dfrac{\mathscr{E}}{2}$. Таким образом,

$$q_1=\frac{C_1\mathscr{E}}{2}, \quad q_2=\frac{5\mathscr{E}C_2}{4},$$

$$q_0=q_1+q_2=\frac{\mathscr{E}}{4}(2C_1+5C_2).$$

О. Овчинников

♦

Ф603. *Студент ездит в институт на метро по кольцевой линии. Станция, на которой он садится, и станция, на которой он выходит, находятся на противоположных концах диаметра кольца, так что студенту безразлично, в какую сторону ехать. Поэтому он садится в тот поезд, который подойдет раньше. Количество поездов, идущих по кольцу в разные стороны, одинаково. Однако студент заметил, что он чаще ездит на поезде, идущем по часовой стрелке. Как это можно объяснить?*

Обозначим t интервал времени между поездами, идущими в одну сторону. Если промежуток времени между отправлением поезда, идущего по часовой стрелке, и отправлением ближайшего (по времени) поезда, идущего против часовой стрелки, равен τ, то между отправлениями поезда, идущего против часовой стрелки, и поезда, идущего по часовой стрелке, проходит время $t-\tau$. Если $\tau<t/2$, то $t-\tau>\tau$. Вероятность того, что студент придет на станцию в интервал времени $t-\tau$, очевидно, в $(t-\tau)/\tau$ раз больше вероятности того, что он придет в интервал времени τ. Поэтому-то студент и ездит чаще на поезде, идущем по часовой стрелке.

И. Слободецкий

Премии «Кванта»

В 1979/80 учебном году редакция получила более 12 тысяч писем с решениями задач из Задачника «Кванта». Специальной премией, учрежденной редакционной коллегией журнала,— подпиской на «Квант» на 1981 год — награждаются школьники, решившие наибольшее число задач или приславшие наиболее оригинальные решения:

АПОЛОНСКИЙ Игорь (г. Жуковский)
БАРГ Анатолий (г. Киев)
ВАСИЛЬЕВ Владислав (г. Великие Луки)
ВАХРИН Сергей (г. Новосибирск)
ВЕЙЦМАН Борис (г. Одесса)
ГАЙСИНСКИЙ Моисей (г. Ташкент)
ГРИГОРЬЕВ Дмитрий (г. Москва)
ЕЛИШЕВИЧ Илья (г. Чернигов)
ЗЕЙФМАН Михаил (г. Вологда)
КОРОБОВ Виктор (г. Кировоград)
ЛУКЬЯНЧУК Игорь (г. Киев)
ЛЯПИН Александр (г. Гомель)
МИХАЙЛОВСКИЙ Сергей (с. Концегорье Архангельской обл.)
ПАВЛЫЧЕВ Андрей (г. Рига)
ПЕНТЕГОВ Всеволод (г. Киев)
ПЕРЕЛЬМАН Григорий (г. Ленинград)
ТИТЕНКО Владимир (д. Блужа Минской обл.)
ЦЕКАНОВСКИЙ Владислав (г. Донецк)
ШКРАДЮК Игорь (г. Ногинск)

За активную работу с учащимися и пропаганду физико-математических знаний, в результате чего многие школьники достигли значительных успехов в нашем конкурсе, подпиской на «Квант» на 1981 год награждаются школа № 145 г. Киева и школа № 11 г. Львова.

За успешное участие в XIV Всесоюзной физико-математической олимпиаде подпиской на «Квант» на 1981 год награждаются:

ВИШНЯКОВ Владимир (г. Балаково)
ДРЯСОВА Наталия (г. Ангарск)
ИВЛЕВ Вадим (г. Железногорск-Илимский)
КРАСОВ Андрей (г. Узловая)
КУВАТБЕКОВА Роза (г. Фрунзе)
РУДИК Виктория (г. Уральск)
СИНЮКОВ Юрий (ст. Селезни Тамбовской обл.)
ТАНИ Юрий (г. Славгород)
ФРЕГЕР Вячеслав (г. Вольск)
ХОДОРОВСКИЙ Вадим (п. Нововоронежский Воронежской обл.)
ЦЫГВИНЦЕВ Павел (г. Анадырь)
ШИШКЕВИЧ Ирина (г. Чарджоу)
ЯХШИМОВ Хамдам (Хорезмская обл.)

За успешное участие в V Летней школе юных программистов подпиской на «Квант» на 1981 год награждаются:
АБДРАХМАНОВА Гульзина (п. Курайли Актюбинской обл.)
БОРДЕ Сергей (г. Красноярск)
МЕЛЯКОВА Татьяна (п. Чегдомын Хабаровского кр.)
ПОГОЯСН Константин (г. Усть-Каменогорск)
УСТИНОВ Игорь (г. Верхняя Пышма)

За активное участие в Празднике юных математиков (г. Батуми) подпиской на «Квант» на 1981 год награждаются: бакинская школа № 46, батумская школа № 7, киевская школа № 208, ленинградское ПТУ № 24, московские школы №№ 18, 19, 57, 91, тбилисская школа № 96 и член оргкомитета Праздника преподаватель школы № 7 г. Батуми Жгенти М. И. За активное участие в Празднике юных физиков (г. Москва) подпиской на «Квант» на 1981 год награждаются: московские школы №№ 2, 18, 57, 91, 179, школа № 82 п. Черноголовка Московской области и комитет ВЛКСМ Физического института им. П. Н. Лебедева Академии наук СССР.

Квант для младших школьников

Задачи

Вот уже 17 лет существует в Евпатории городской клуб КС^2 — Клуб Смекалистых и Сообразительных. Руководит этим клубом учитель школы № 8 Владимир Александрович Славнин. Члены клуба вместе решают задачи, вместе отдыхают. В этом номере мы предлагаем нашим младшим школьникам несколько задача клуба КС^2.

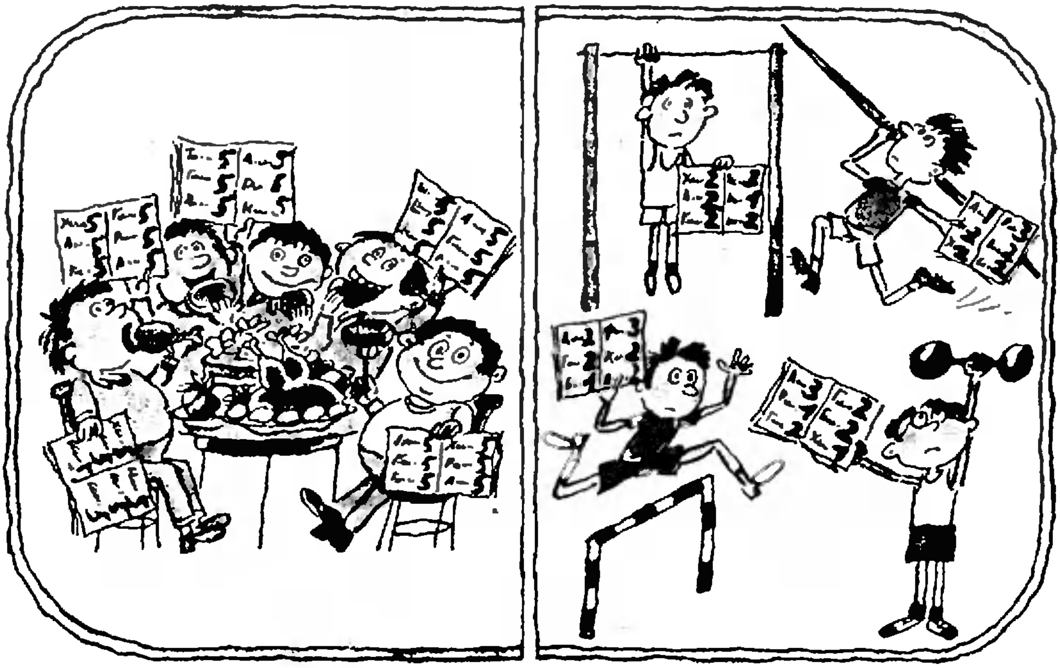
1. Заданы пять чисел: $a_1=1$, $a_2=-1$, $a_3=-1$, $a_4=1$, $a_5=-1$. Шестое число равно произведению первого на второе, седьмое — произведению второго на третье, восьмое — произведению третьего на четвертое и так далее. Какое число получится на 1980-м месте?

2. Из карточек, на которых написаны цифры, сложена фигура, изображенная на рисунке. Володя предложил Саше разложить карточки так, чтобы фигура осталась прежней, но каждая карточка касалась только новых соседей. Саша до сих пор решает эту задачу и никак не может ее решить. Что вы ему посоветуете?

3. Известно, что в январе — четыре понедельника и четыре пятницы. Какой день недели приходится на 1 января?

4. В стозначном числе 1234567890 1234567890123...7890 вычеркнули все цифры, стоящие на нечетных местах. В полученном пятидесятизначном числе вновь вычеркнули цифры на нечетных местах. Вычеркивание продолжалось до тех пор, пока ничего не осталось. Какая цифра была вычеркнута последней?

5. Можно ли раскрасить клетки квадратной сетки 5×5 в пять цветов так, чтобы в каждой строке и в каждом столбце были клетки всех пяти цветов, а поля каждого цвета можно было бы обойти ходом шахматного коня, побывав на каждом из пяти таких полей ровно один раз?



И. Никольская

«Неверно, что...» — как это понимать?

Петя твердо решил развить у себя силу воли и сказал об этом Кате.

— Начну с того,— доверительно сообщил он сестре,— что составлю план на каникулы и выполню его по всем пунктам.

Накануне каникул Петя торжественно вручил Кате листок бумаги, на котором было аккуратно написано:

В каникулы я обязательно прочту, по крайней мере, одну толстую книгу, схожу в музей или на лекцию и, если не будет оттепели, все вечера проведу на катке.

Повесив обязательство над кроватью, Петя с первого дня каникул решительно взялся за дело: начал читать «Записки охотника» и принес из библиотеки «Три мушкетера». На другой день он сходил в Зоологический музей посмотреть мамонтенка Диму. Пять вечеров подряд Петя провел на катке, но потом стало совсем тепло ($+5°$!) и каток пришлось отменить. К концу каникул Петя закончил чтение «Записок охотника» и прочитал половину «Трех мушкетеров». В общем Петя был собой доволен, но Катя сумела испортить ему настроение.

— Между прочим, ты не был на катке ни вчера, ни позавчера,— ехидно заметила она.

— У меня же была уважительная причина! — возмутился Петя.

— Ну, а кроме того, ты не был на лекции,— напомнила Катя.

Сходить на лекцию Петя и в самом деле не собрался, но и тут нашел, что возразить: в Зоологическом музее он слушал экскурсовода, рассказывавшего о мамонтах.

— Но ведь ты собирался в музей или на лекцию, а не в музей и на лекцию сразу,— не унималась Катя,— и «Три мушкетера» не дочитал.

Поняв, что Катю ему не переспорить, Петя махнул рукой и пошел к приятелю Мите, очень рассудительному человеку, интересующемуся к тому же математической логикой.

Мите захотелось утешить расстроенного друга.

— Мы еще посмотрим, кто прав, ты или Катя,— сказал он.— Что значит — ты не выполнил плана? В этом надо разобраться.

И они стали разбираться.

— Сначала давай еще раз перечислим дела, которые ты наметил,— предложил Митя.— Сделаем это так: пусть D_1 — *прочитать, по крайней мере, одну толстую книгу*, D_2 — *сходить в музей*, D_3 — *сходить на лекцию*, D_4 — *все вечера провести на катке*. Теперь запишем взятое тобой обязательство кратко, обозначив условие *не будет оттепели* буквой Y: D_1 *и* (D_2 *или* D_3) *и* (*если* Y, *то* D_4).

— Катя утверждает, что ты не выполнил свое обязательство, т. е. о т р и ц а е т, что ты его выполнил. Что же это значит — отрицает? В каком случае отрицание какого-либо утверждения истинно, а в каком — ложно? Начнем с простого. Допустим, ты утверждаешь, что «Чапаев» сегодня идет в нашем клубе, а Катя, как всегда, спорит, уверяя, что «Чапаев» сегодня не идет в нашем клубе. Если твое утверждение истинно, то Катино ложно, а если ты ошибаешься, то Катя права.

Отрицанием данного предложения A называют предложение, утверждающее, что A не верно; таким образом, если A истинно, его отрицание ложно; если же A ложно, его отрицание истинно. Отрицание предложения A иногда обозначают через $\neg A$ или $\overline{A}$ (рис. 1).

Построить для любого предложения его отрицание проще простого: достаточно поставить перед ним слова *неверно, что*. Например, отрицанием предложения *«Чапаев» сегодня идет в нашем клубе* будет предложение *Неверно, что «Чапаев» сегодня идет в нашем клубе*. А предложение *Неверно, что все отличники в нашем классе — спортсмены* — отрицание предложения *Все отличники в нашем классе — спортсмены*.

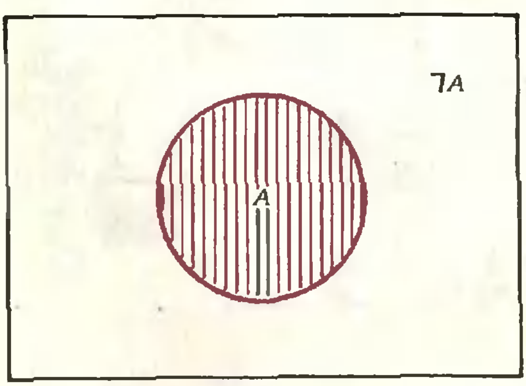


Рис. 1.

Однако это *неверно, что* делает предложение громоздким, неуклюжим. В первом случае, как мы с тобой уже видели, можно сказать проще, а именно *«Чапаев» сегодня не идет в нашем клубе*, то есть вместо *неверно, что* в начале предложения поставить *не* перед его сказуемым. А можно ли и во втором случае поступить так же?

— Почему же нет? — удивился Петя. — Пожалуйста: *Все отличники в нашем классе — не спортсмены*.

— Напоминаю, что предложение и его отрицание не могут быть ни одновременно истинными, ни одновременно ложными, — заметил Митя.

Подумав, Петя сказал:

— Да, а предложения *Все отличники в нашем классе — спортсмены* и *Все отличники в нашем классе — не спортсмены* оба ложны: Катька — отличница и фигуристка, а ты вот — отличник, а спортом не занимаешься. К сожалению, некоторые отличники в нашем классе — не спортсмены.

— Вот-вот, — обрадовался Митя, — ты как раз и сформулировал отрицание предложения *Все отличники в нашем классе — спортсмены*: *Некоторые отличники в нашем классе — не спортсмены*. Это предложение имеет тот же смысл, что и предложение *Неверно, что все отличники в нашем классе — спортсмены*. Вообще, отрицанием предложения *Все x обладают свойством P* является предложение *Некоторые x не обладают свойством P*.

Символически это записывают так:

$$\neg \forall x\, P(x) \Leftrightarrow \exists x \neg P(x). \qquad (1)$$

Знак $\forall$ означает *все* (*всякий, каждый, любой*), а знак $\exists$ — *некоторый* (*существует, есть, имеется*).

Пусть, например, x означает *озеро*, а P — свойство *быть пресноводным*; тогда запись (1) будет означать «*Неверно, что все озера пресноводные* равносильно *Некоторые озера — не пресноводные*».

Интересно, что отрицание предложения, имеющего форму $\exists x\, P(x)$, строится аналогично:

$$\neg \exists x\, P(x) \Leftrightarrow \forall x \neg P(x). \qquad (2)$$

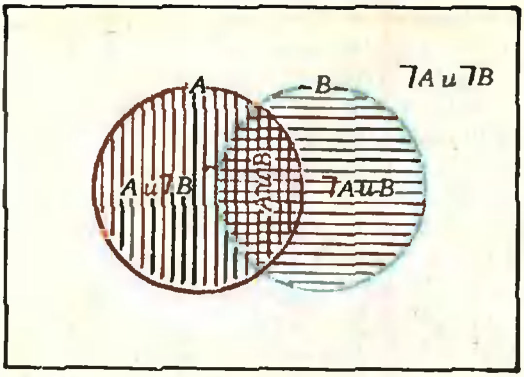


Рис. 2.

Сказать *Неверно, что существует четвероногие птицы* все равно, что сказать *Все птицы не четвероноги*. Понял? Теперь тебе легче спорить с Катей. Она скажет тебе, например: «Опять ты все конфеты съел!». А ты ей в ответ: «Существует конфета, которую я не съел». И извлечешь из коробки последнюю конфету. Она тебе: «Некоторые мальчишки — такие сластены». А ты ей гордо: «Все мальчишки — не сластены». Правда, этого ты не докажешь, даже если приведешь в пример десяток или два знакомых мальчишек, презирающих сласти.

Так обстоит дело с отрицаниями простых предложений. Если в них нет (и не подразумевается) слов *все* (*всякий, каждый, любой*) или *некоторые* (*существует, есть, имеется*), то для построения отрицания достаточно поставить *не* перед сказуемым. Если же перед подлежащим простого предложения стоит (или подразумевается) слово *все*, либо слово *некоторые*, то для того, чтобы получить его отрицание, нужно не только поставить *не* перед сказуемым, но и заменить слово *все* словом *некоторые*, а слово *некоторые* словом *все*.

А теперь давай посмотрим, как образуются отрицания сложных предложений, имеющих форму *A и B*. *A или B*. *Если A, то B*. Как, например, ты станешь отрицать, что опоздал в школу и получил двойку?

— Скажу, что не опаздывал и не получал двойки.

— Но ведь предложения *Ученик опоздал в школу и получил двойку* и *Ученик не опаздывал в школу и не получал двойки* могут оказаться одновременно ложными. Так будет, например, в том случае, если этот ученик пришел в школу вовремя, но двойку получил. Значит, ты построил свое отрицание неправильно. Отрицанием предложения, имеющего форму *A и B*, является предложение $\neg A$ *или* $\neg B$, где *или* имеет н е р а з д е л и т е л ь н ы й смысл, то есть допускает возможности: 1) *A и* $\neg B$, 2) $\neg A$ *и B*, 3) $\neg A$ *и* $\neg B$. Понять это тебе поможет рисунок 2. На этом рисунке круг *A* соответствует утверждению «*A* истинно», а круг *B* — утверждению «*B* истинно». Все, что осталось за пределами круга *A*, соответствует истинности $\neg A$, а все, что находится за пределами *B*, соответствует истинности $\neg B$. Отсюда ясно, что область «в клеточку» соответствует истинности *A и B*, область «в вертикальную полоску» — истинности *A и* $\neg B$, область «в горизонтальную полоску» — истинности $\neg A$ *и B*, незаштрихованная область — истинности $\neg A$ *и* $\neg B$. Итак, область «в клеточку» соответствует истинности *A и B*, а все остальное — истинности $\neg$(*A и B*). Но это «все остальное» состоит из областей истинности *A и* $\neg B$, $\neg A$ *и B*, $\neg A$ *и* $\neg B$.

— Теперь я понял, — сказал Петя. — Отрицая обвинение сразу в двух прегрешениях, я должен был сказать, что не совершал хотя бы

одного из них — не опоздал в школу или не получил двойки.

— Молодец! — похвалил Митя товарища. — А теперь сообрази, как построить отрицание предложения *А или В*. Как мы с тобой уже выяснили, это предложение истинно, когда *А* истинно, а *В* ложно, когда *А* ложно, а *В* истинно и когда *А* и *В* оба истинны. На рисунке 2 этому предложению соответствует вся заштрихованная область.

— Ну, это совсем легко, — сказал Петя. — Ясно, что $\neg$(*А или В*) — это $\neg$*А и* $\neg$*В*. Значит, отрицанием предложения *Мальчик сходил в музей или на лекцию* будет предложение *Мальчик не сходил в музей и не сходил на лекцию*. Так ведь? А я в музее был. Выходит, зря Катька ко мне придиралась.

— По этому поводу, конечно, зря, — отозвался Митя. — Но давай до конца разберемся. Ты собирался, если не будет оттепели, все вечера провести на катке. Этот пункт твоего обязательства имеет форму условного предложения *Если А, то В*. Как же построить отрицание такого предложения?

— *Если не А, то не В*, — не задумываясь, ответил Петя. — Хотя нет: *Если А, то не В*. А может быть *Если не А, то В*?

— Не торопись, — остановил его Митя. — На этот вопрос трудно сразу ответить правильно. Дело в том, что условное предложение *Если А, то В* приходится иногда рассматривать и при ложном *А*. В этом случае его естественно считать истинным. Ведь если ты скажешь Кате: «Если завтра выпадет снег, то я поеду за город», а снега не будет, наверное, даже она не скажет, что ты соврал. Таким образом, условное предложение *Если А, то В* ложно только в том случае, когда *А* истинно и *В* ложно. Поэтому отрицанием этого предложения будет предложение

— *А и не В*! — перебил приятеля Петя. — Вот это неожиданность! Действительно, сразу ни за что не догадаешься. Впрочем, когда я говорю Катьке: «Если я схожу в магазин, то ты дашь мне списать задачу», она всегда возражает: «В магазин сходишь как миленький, а задачу списать не дам».

— Ну, вот, — сказал Митя, — теперь мы сможем проверить выполнил ли ты свое обязательство, и выяснить, кто прав — ты или Катя.

Символически правила взятия отрицания, до которых мы додумались, записываются так:

$$\neg(A \text{ и } B) \Leftrightarrow \neg A \text{ или } \neg B \qquad (3)$$
$$\neg(A \text{ или } B) \Leftrightarrow \neg A \text{ и } \neg B \qquad (4)$$
$$\neg(\text{если } A, \text{ то } B) \Leftrightarrow A \text{ и } \neg B. \qquad (5)$$

Вернемся к краткой записи твоего обязательства:

D_1 *и* (D_2 *или* D_3) *и* (*если* Y, *то* D_4).

Катя отрицает, что ты его выполнил, то есть утверждает, что истинно предложение

$$\neg[D_1 \textit{ и } (D_2 \textit{ или } D_3) \textit{ и } (\textit{если } Y, \textit{ то } D_4)].$$

«Расшифруем» эту запись. Сначала вспомним правило (3). Применив это правило дважды, получим

$$\neg D_1 \textit{ или } \neg(D_2 \textit{ или } D_3) \textit{ или } \neg(\textit{если } Y, \textit{ то } D_4).$$

Теперь применим правила (4) и (5). Получим

$$\neg D_1 \textit{ или } (\neg D_2 \textit{ и } \neg D_3) \textit{ или } (Y \textit{ и } \neg D_4).$$

Катя права в том и только в том случае, если хотя бы одно из предложений $\neg D_1$, $\neg D_2$ *и* $\neg D_3$, Y *и* $\neg D_4$ истинно. Разберем каждое из этих предложений в отдельности.

$\neg D_1$ означает *Неверно, что ты прочитал по крайней мере одну толстую книгу*, то есть что ты не прочитал ни одной толстой книги. Но ты прочитал «Записки охотника»; значит, $\neg D_1$ ложно.

$\neg D_2$ *и* $\neg D_3$ означает, что ты не сходил ни в музей, ни на лекцию. Но ты сходил в музей; значит, это утверждение ложно.

Y *и* $\neg D_3$ означает, что не было оттепели, но ты не все вечера провел на катке, или, иначе, не было оттепели и были вечера, которые ты не провел на катке. Такие вечера и вправду были, но утверждение *Не было оттепели* не соответствует действительности, то есть ложно. Значит, и утверждение Y *и* $\neg D_4$ ложно.

Вот мы с тобой и убедились, что Катя неправа. Теперь нужно и ее в этом убедить. Расскажи ей все, что ты узнал об отрицании, а чтобы усвоить это понятие и проверить себя, подумайте вместе над такими вопросами и задачами:

1. Какое из предложений $a<2$, $a\leqslant 2$ является отрицанием предложения $a>2$? Почему?

2. Является ли отрицанием предложения *Он — мой друг* предложение *Он — мой враг?* Почему?

3. Скажите по-другому:

а) *Неверно, что 551 — простое число.*

б) *Неверно, что все млекопитающие живут на суше.*

в) *Неверно, что некоторые собаки летают.*

4. Что утверждает предложение *Неверно, что* $2\cdot 2\neq 4$?

5. Что утверждает предложение *Неверно, что все простые числа нечетны?* Истинно или ложно это утверждение?

6. Сформулируйте в утвердительной форме (то есть так, чтобы в начале предложения не было *не* или *неверно, что*) отрицание предложения *Существует школа, все ученики которой не интересуются спортом.*

7. На вопрос Кости, можно ли ему пойти в кино или погулять, мама ответила отрицательно. Как должен поступить Костя, чтобы не ослушаться маму?

8. Постройте отрицание предложения *Если число 899 делится на 31, то это число делится на 13.* Установите, истинно это предложение или ложно.

Список читателей, приславших правильные решения задач из Задачника «Кванта»

(Начало см. на с. 21, 33)

И. Житенев (п. Черноголовка Московской обл.) **89, 93—97, 99, 01, 02**; *В. Жордочкин* (Орск) **89, 94, 96, 99, 01, 02**; *А. Заневский* (Ленинград) **94—96, 02**; *М. Зейфман* (Вологда) **89, 90, 94—96, 99, 01**; *И. Зильберберг* (Алма-Ата) **95—97, 99—02**; *И. Иванов* (Саратов) **89, 91, 95—97, 99—02**; *В. Изергин* (Новосибирск) **93, 95—97, 99, 02**; *В. Израилит* (Днепропетровск) **95, 97, 99**; *А. Иовайта* (Каунас) **99**; *В. Кагиловский* (Харьков) **93, 01**; *С. Калмыков* (Копейск) **94**; *Л. Каплан* (Зеленоград) **99**; *А. Карасев* (Белгород) **01**; *В. Катин* (Житомир) **89**; *Э. Кафиров* (Баку) **89**; *А. Кечеджян* (Ереван) **99, 01**; *В. Киреев* (Фрунзе) **94**; *Ю. Коверник* (Запорожье) **93—97, 99**; *Е. Коган* (Днепропетровск) **89—91, 94—96, 99—02**; *В. Козловский* (Новолукомль) **89—91, 94, 95, 97, 02**; *А. Кожевников* (Днепропетровск) **93, 95**; *Т. Кожоридзе* (Телави) **89—91, 93, 95, 97**; *Г. Коломойцев* (Сумгаит) **93—96, 00, 02**; *В. Комов* (Александров) **89, 91, 93—95, 97, 99, 00, 02**; *Т. Кондрацкая* (Киев) **94—97, 02**; *С. Копкин* (Арзамас) **94—96**; *В. Коробов* (Кировоград) **90, 94, 95, 99**; *М. Костик* (Саратов) **94, 95**; *И. Костюкович* (Ленинград) **93, 95**; *К. Крапивной* (Запорожье) **94—97, 00**; *И. Красиков* (Киев) **95—97, 99, 00**; *М. Кривега* (Саратов) **94, 95**; *Р. Крис* (Киев) **94—97, 01**; *Е. Кузнецов* (Кишинев) **90, 95, 02**; *П. Кузнецов* (Киев) **91, 93—97, 00, 02**; *А. Кузьмин* (Алма-Ата) **90, 91**; *А. Кузьмин* (Киев) **99**; *С. Курчатов* (Саратов) **89, 91, 95—97, 99—02**; *Н. Кухианидзе* (Кутаиси) **99**; *Б. Лапидус* (Москва) **94, 01**; *Б. Лейтес* (Москва) **99**; *И. Леонов* (Воронеж) **93—96, 99, 01**; *И. Лукьянчук* (Киев) **95, 96**; *Е. Любовицкий* (Кострома) **94**; *А. Ляпин* (Гомель) **93, 95—97, 99, 00, 02**; *А. Мазуркевич* (Лыткарино) **89—91, 93—97, 00, 02**; *О. Мануйленко* (Киев) **99, 01**; *З. Мардарашвили* (Кутаиси) **93, 94**; *С. Махортых* (Лисичанск) **94, 96, 97**; *А. Мельник* (Житомир) **94**; *А. Микула* (Жидачов) **89, 93—97, 99, 00, 02**; *С. Милованов* (Запорожье) **99, 00**; *А. Минаев* (Саратов) **91, 93—96, 99—02**; *И. Михайлов* (Кемерово) **94, 95**; *С. Михайловский* (Виноградовский р-н Архангельской обл.) **95**; *Г. Молчанов* (Саратов) **89, 91, 95—97, 99—02**; *Ю. Морозов* (Киев) **93**; *Р. Набоков* (Москва) **94—97, 99, 00, 02**; *С. Надточий* (Москва) **89—91, 93—97, 99—02**; *А. Назаренко* (Киев) **91, 93—97, 01**; *А. Найден* (Берлин, ГДР) **99, 01**; *Н. Никонова* (Свердловск) **94**; *Д. Ноздрин* (Саратов) **00—02**; *С. Обогуев* (Ленинград) **95—97, 99—02**; *Д. Овсянников* (Ленинград) **89, 91, 93, 95—97, 00—02**; *О. Одилов* (Кулябская обл. ТаджССР) **01**;

(Окончание см. на с. 49)

А. Земляков

Проверьте себя

Открывая в новом учебном году наш раздел «По страницам школьных учебников», мы предлагаем нашим читателям, в качестве разминки перед началом учебного года, проверить свои знания за прошедший год. Для этого им следует выполнить публикуемое ниже задание: девятиклассникам — за VIII класс, десятиклассникам — за IX класс. Для каждого из 10 вопросов нужно выбрать единственный правильный ответ; на выполнение всего задания отводится 30 минут.

Это задание предлагалось на республиканских турах Всесоюзной математической олимпиады 1980 г. Не следует, однако, думать, что речь идет о решении хитрых, «олимпиадных» задач: задание состоит из простых вопросов, проверяющих знания учащихся по основным темам курса математики VIII—IX классов.

Итак, наточите карандаши, засеките время...

VIII класс

Алгебра

1. Какая из указанных формул задает параболу, изображенную на рисунке 1?

А) $y=-x^2+2$;
Б) $y=-x^2+2x$;
В) $y=-x^2-2x$;
Г) $y=-(x-1)^2$;
Д) $y=-(x-2)^2$.

2. Что представляет собой график уравнения $x^2+xy=0$?

А) Точку;
Б) Прямую;
В) Объединение двух прямых;
Г) Окружность;
Д) Пустое множество.

3. Сократите следующую дробь: $\frac{x^3-y^3}{x^2-y^2}$.

А) $\frac{x^2+xy+y^2}{x+y}$; Б) $\frac{x^2-xy+y^2}{x+y}$;
В) $\frac{x^2+xy+y^2}{x-y}$; Г) $\frac{x^2-xy+y^2}{x-y}$.
Д) $\frac{x^2+xy-y^2}{x+y}$

4. При каких значениях x верно равенство $\sqrt{x^2}=|x|$?

А) При всех x;
Б) Только при $x\geqslant 0$;
В) Только при $x\leqslant 0$;
Г) Только при $x=0$;
Д) Ни при каких x.

5. Какова область определения выражения $(a-5)^{-\frac{1}{3}}$?

А) $]-\infty;\ +\infty[$.
Б) $]-\infty;\ 5[\,\cup\,]5;\ +\infty[$;
В) $[5;\ +\infty[$;
Г) $]5;\ +\infty[$;
Д) $\varnothing$.

6. Каково множество решений неравенства $(0,1)^x>100$?

А) $]-\infty;\ 2[$;
Б) $]2;\ +\infty[$;
В) $]-\infty;\ -2[$;
Г) $]-2;\ +\infty[$;
Д) $\varnothing$.

Геометрия

7. Чему равно значение $\sin\alpha$, если $\cos\alpha=-\frac{1}{2}$ и $0°<\alpha<180°$?

А) $\frac{1}{2}$; Б) $-\frac{1}{2}$; В) $\frac{\sqrt{3}}{2}$;
Г) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$; Д) Определить нельзя.

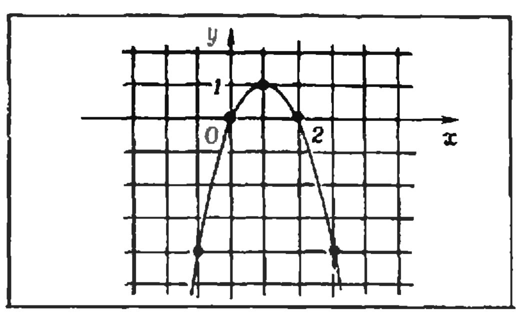


Рис. 1.

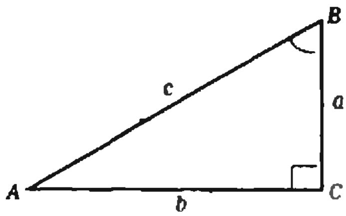


Рис. 2.

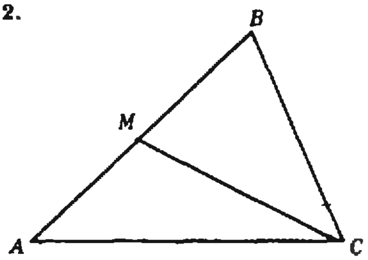


Рис. 3.

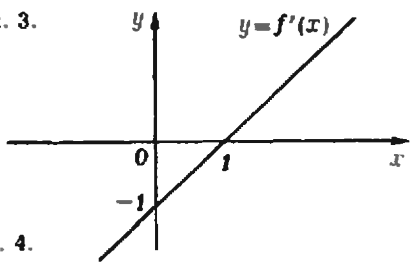


Рис. 4.

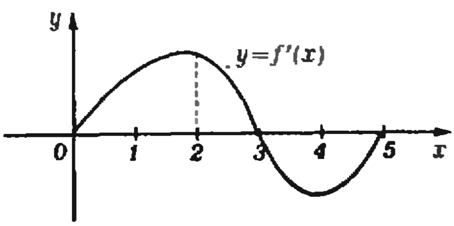


Рис. 5.

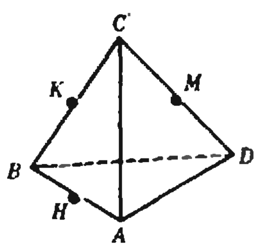


Рис. 6.

8. В прямоугольном треугольнике ABC длины сторон равны a, b и c, как показано на рисунке 2. Чему равен $\sin \widehat{B}$?

А) $\frac{a}{b}$; Б) $\frac{a}{c}$; В) $\frac{c}{a}$; Г) $\frac{c}{b}$; Д) $\frac{b}{c}$.

9. Два угла треугольника ABC равны $\widehat{A}=20°$ и $\widehat{B}=60°$. Где лежит центр окружности, описанной около этого треугольника?

А) Вне треугольника;
Б) Внутри треугольника;
В) На стороне AB;
Г) На одной из двух других сторон;
Д) Определить нельзя.

10. Точка M — середина стороны AB треугольника ABC (рис. 3). Какому из указанных ниже векторов равна сумма векторов $\overrightarrow{CM}+\overrightarrow{AM}$?

А) $\overrightarrow{CA}$; Б) $\overrightarrow{CB}$; В) $\overrightarrow{AC}$; Г) $\overrightarrow{BC}$; Д) $\overrightarrow{AB}$.

IX класс

Алгебра и начала анализа

1. Каково множество решений неравенства $|x-2|<1$?

А) $]-\infty;\ 3[$;
Б) $]0;\ 3[$;
В) $]1;\ 3[$;
Г) $]2;\ 3[$;
Д) Нужное множество не указано.

2. Какое множество задает на координатной плоскости уравнение $x^2+xy=0$?

А) Прямую;
Б) Объединение двух прямых;
В) Точку;
Г) Окружность;
Д) Пустое множество.

3. Какая из указанных функций имеет предел 1 при $x\to 0$?

А) x; Б) $\frac{1}{x}$; В) $1+2x$; Г) $1+\frac{1}{x}$;
Д) Ни одна из этих функций не подходит.

4. Какая из указанных функций имеет производную, график которой изображен на рисунке 4?

А) $f(x)=x^2-1$; Б) $f(x)=x^2-x$; В) $f(x)=\frac{x^2}{2}-1$; Г) $f(x)=\frac{x^2}{2}-x$; Д) $f(x)=-\frac{x^2}{2}+x$.

5. Какая из указанных функций является производной для функции $y=\sqrt{x^2+1}$?

А) $\sqrt{2x+1}$; Б) $\sqrt{2x}$; В) $\frac{2x}{\sqrt{x^2+1}}$; Г) $\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$; Д) $\frac{1}{2\sqrt{x^2+1}}$.

6. Какие промежутки возрастания имеет функция f, если график ее производной выглядит так, как изображено на рисунке 5?

А) [0; 2];
Б) [0; 3];
В) [2; 4];
Г) [0; 2] и [4; 5];
Д) [0; 3] и [4; 5].

Геометрия

7. Точки H, K, M — середины ребер AB, BC и CD произвольного тетраэдра $ABCD$ (рис. 6). Какие еще ребра тетраэдра, кроме указанных, пересекает плоскость (HKM)?

А) AD; Б) BD; В) AC; Г) Других ребер плоскость (HKM) не пересекает; Д) Определить нельзя.

8. Сколько существует плоскостей, проходящих через данную точку и параллельных двум данным параллельным между собой прямым?

А) Ни одной;
Б) Одна;
В) Две;
Г) Бесконечно много;
Д) Правильный ответ не указан.

9. Какому из указанных ниже векторов равна сумма векторов $\overrightarrow{HM}+\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{CM}$, где точки H и M — середины ребер AB и CD тетраэдра $ABCD$ (см. рисунок 6)?

А) $\vec{0}$; Б) $\overrightarrow{HC}$; В) $\overrightarrow{AC}$; Г) $\overrightarrow{AH}$; Д) $\overrightarrow{HA}$.

10. Скалярное произведение двух векторов равно — 2. Что можно сказать об угле между этими векторами?

А) Острый;
Б) Тупой;
В) Прямой;
Г) Определить нельзя, острый угол, тупой или прямой;
Д) Скалярное произведение не может равняться — 2.

Список читателей, приславших правильные решения задач из Задачника «Кванта»

(Начало см. на с. 21, 33, 46)

С. Одинцова (Киев) **99**; *А. Орлов* (п. Черноголовка Московской обл.) **89—91, 95, 96**; *А. Осипов* (Сосновый Бор Ленинградской обл.) **89, 95**; *И. Осовяк* (с. В. Ледеркалы Тернопольской обл.) **94—97, 00—02**; *О. Панащенко* (Киев) **90, 94—97, 00—02**; *А. Пантелеев* (Ростов-на-Дону) **94**; *В. Пентегов* (Киев) **94, 96, 97—99**; *Г. Перельман* (Ленинград) **95**; *С. Пишенин* (Череповец) **90**; *А. Полисский* (Киев) **95, 96**; *Е. Поляков* (Калининград Московской обл.) **94, 96**; *А. Пономаренко* (Киев) **89, 90, 94, 97, 01**; *Е. Рибкин* (Гомель) **89**; *С. Равняго* (Золочев Львовской обл.) **94—96, 02**; *Ю. Рачинский* (Москва) **99**; *В. Рогозин* (Щелково) **95**; *Б. Рублев* (Киев) **99, 01**; *Г. Рыбкин* (Смоленск) **99, 02**; *С. Рязанцева* (Борисоглебск) **94, 95, 00, 02**; *А. Санжур* (Киев) **95, 97, 99, 01, 02**; *В. Саракули* (Ижевск) **90, 94—96**; *С. Селифонова* (с. Попелево Калужской обл.) **95—97, 01**; *Т. Сергейцев* (Челябинск) **89—91, 93—97, 99—01**; *В. Середа* (Львов) **89, 93—97, 99, 01**; *А. Сивенцев* (Свердловск) **01**; *В. Сидорин* (Реутов) **95**; *Н. Сирых* (Ярославль) **95, 97, 99, 01**; *И. Скиворонский* (Андижан) **99**; *А. Скок* (Талгар) **89, 94—97, 00, 01**; *С. Скопцов* (Ангарск) **89, 90, 94, 95**; *Н. Смирнов* (Москва) **01**; *С. Смирнов* (Ташкент) **93, 95, 97, 99**; *Г. Солдак* (Минск) **89, 90, 93—97**; *Д. Сорока* (Запорожье) **90, 93—97, 99, 00, 02**; *А. Спивак* (Стерлитамак) **01**; *Д. Суворов* (Свердловск) **94, 95**; *П. Страдынь* (Рига) **94—96, 00, 01**; *А. Стрешинский* (Донецк) **89, 94, 95, 97, 99—02**; *Д. Стыркас* (п. Черноголовка Московской обл.) **95, 00, 01**; *А. Сырок* (Страшены) **99**; *А. Уливанов* (Горький) **95—97, 01**; *В. Усачев* (Ромны Сумской обл.) **01**; *В. Усов* (Томск) **89, 95, 97, 00, 01**; *Л. Уткин* (Вологда) **94—96, 01**; *В. Фарбер* (Баку) **89, 95, 96, 99, 01**; *Н. Федин* (Омск) **89, 93—97, 99—02**; *В. Федюкович* (Киев) **94—96, 99—02**; *Е. Феликсон* (Пенза) **94, 95**; *А. Фетискин* (Рязань) **94**; *А. Флерон* (Рига) **89, 95—97**; *И. Фоменко* (Днепропетровск) **90, 93—01**; *О. Фонарев* (Сумгаит) **92, 96, 99**; *Д. Харзеев* (Курск) **01**; *О. Хорошевская* (Новосибирск) **94**; *С. Хосид* (Алма-Ата) **89—91, 95—97, 99, 01, 02**; *Л. Хризман* (Киев) **91, 94, 95, 97, 00, 01**; *М. Цолик* (Орск) **96**; *Ю. Цыганков* (Дрожжановский р-н ТАССР) **89, 91, 93, 95, 97, 99**; *А. Чепуров* (ст. Григорополисская Ставропольского кр.) **99, 01**; *Е. Чулкин* (с. Рябово УАССР) **90, 95, 01**; *А. Чулков* (р. п. Мученский Тамбовской обл.) **01**; *А. Чумадин* (Баку) **93, 95—97, 99, 00**; *А. Чумаков* (Куйбышев) **93, 95, 97, 00**; *В. Шаблинский* (Киев) **89—91, 94—97, 01**; *С. Шарый* (Семипалатинск) **89, 94, 95, 97**; *И. Швец* (Желтые Воды) **94—97**; *А. Шевченко* (Артемовск Донецкой обл.) **01**; *М. Шевченко* (Артемовск Донецкой обл.) **01**; *А. Шершнев* (Москва) **00, 01**; *В. Шик* (Сумгаит) **95, 97**; *А. Шимановский* (Гомель) **95—97**; *И. Шкридюк* (Ногинск) **90, 93—95, 97**; *С. Шляков* (Саратов) **95, 97**; *В. Юсупов* (Баку) **99**; *Л. Ящук* (Ровно) **96, 99**.

Как всегда, с сентябрьского номера нашего журнала начинается новый учебный год в «Практикуме абитуриента». В этом разделе редакция «Кванта» будет систематически публиковать материалы, адресованные, в первую очередь, тем, кто готовится к вступительным экзаменам в вузы.

Читатели найдут в статьях «Практикума абитуриента» подробное разъяснение наиболее трудных тем и отдельных теоретических вопросов школьных курсов математики и физики, анализ особенно часто встречающихся ошибок поступающих, методические рекомендации, разбор решений типичных задач из вариантов приемных экзаменов. На страницах этого раздела будут помещены также образцы вариантов письменных экзаменов и задач устных экзаменов по математике и физике, которые предлагались в 1980 году в различных вузах нашей страны.

Статьи «Практикума абитуриента» будут полезны не только тем, кто собирается поступать на математические или физические факультеты университетов и институтов, но и абитуриентам технических вузов. Сегодняшние десятиклассники, особенно те из них, кто живет в селах, рабочих поселках, вдали от научно-педагогических центров, получат возможность узнать, что представляет собой приемный экзамен, какие требования предъявляются к поступающим. Кстати, многое в материалах «Практикума абитуриента» будет доступно и девятиклассникам, так что читать этот раздел могут все старшеклассники.

Будущих абитуриентов, конечно, интересует вопрос, как лучше организовать подготовку к приемным экзаменам. Прежде всего, нужно внимательно познакомиться с «Программами вступительных экзаменов для поступающих». Там подробно перечислены основные математические и физические понятия, которыми должен владеть поступающий, теоремы и утверждения, которые надо уметь доказывать, факты, которые необходимо знать. Все эти сведения содержатся в школьных учебниках — их-то и надо в первую очередь тщательно изучить. Для успешной сдачи вступительных экзаменов никаких дополнительных — по сравнению со школьными курсами математики и физики — знаний не требуется. Однако не следует думать, что достаточно еще раз просто прочесть школьные учебники! Необходимо внимательно разобрать и глубоко усвоить теоретический материал, получить твердые и прочные навыки в решении задач. Залог успеха на экзаменах — систематическая и регулярная самостоятельная работа в течение всего оставшегося до экзаменов времени. Математику и физику нельзя выучить за один день или за одну неделю — только планомерные длительные занятия сделают экзаменационные задачи и вопросы простыми и легкими.

Несколько слов еще об одном вопросе — о репетиторах. Не секрет, что некоторые поступающие (а еще чаще — их родители) надеются с помощью репетиторов перед экзаменами быстро и без особого труда повторить необходимый теоретический материал и познакомиться с методами решения типичных задач. Это глубокое заблуждение! Никакие репетиторы не могут заменить главного — подлинного интереса к избранной специальности, внутренней потребности учиться, упорного и настойчивого труда.

Редакция журнала «Квант» надеется, что раздел «Практикум абитуриента» станет добрым советчиком поступающих в вузы. Кроме материалов, которые появятся в этом разделе в последующих номерах журнала, можно порекомендовать поступающим познакомиться и с некоторыми статьями, опубликованными в прошлые годы. Тематический список таких статей помещен в «Кванте», 1980, № 1, с. 46—47.

Ю. Метт

Три стандартные задачи

Поводом для этой статьи послужили грубые ошибки, допускаемые иногда школьниками при решении некоторых стандартных задач.

Задача 1. *Решить систему*

$$\begin{cases} x^4-1330x-23=0, \\ x^4-1319x-144=0. \end{cases} \qquad (1)$$

Порой предлагается такое «решение»: вычтя из первого уравнения системы (1) второе уравнение, получим уравнение $-11x+121=0$, откуда $x=11$. Однако нетрудно заметить, что найденное значение не является решением ни одного из данных уравнений: их свободные члены на 11 не делятся. В чем же ошибка?

Дело в том, что уравнение

$$-11x+121=0, \qquad (2)$$

имеющее единственное решение $x=11$, является только следствием системы (1), оно не равносильно ей: всякое решение системы (1), действительно, является решением уравнения (2), но не наоборот. Поэтому пока можно сделать лишь вывод: если система (1) имеет решение, то оно единственно и является решением уравнения (2). Подставляя $x=11$ в систему (1) или рассуждая, как выше, делаем окончательный вывод: система (1) решений не имеет.

Задача 2. *При каких значениях параметра k сумма квадратов корней уравнения*

$$4x^2-28x+k=0 \qquad (3)$$

равна 22,5?

Обычно предлагается такое «решение»:

$$x_1^2+x_2^2=(x_1+x_2)^2-2x_1x_2.$$

Если x_1 и x_2 — корни уравнения (3), то по теореме Виета $x_1+x_2=7$ и $x_1x_2=k/4$. Тогда из (4) $k=53$.

Но это число нельзя считать ответом задачи 2, так как оно было получено в дополнительном предположении, что корни существуют, то есть, что уравнение (3) имеет решение. Однако при $k=53$ дискриминант уравнения (3) 14^2-4k отрицателен и уравнение решений не имеет. Таким образом, правильный ответ в задаче 2 — «ни при каких».

Задача 3. *В какой точке функция*

$$y=(2+\sin x)(6-\sin x) \qquad (5)$$

принимает наибольшее значение на числовой прямой?

Один школьник предложил следующее «изящное решение» этой задачи (беда только в том, что оно неверно):

Как известно, если данное положительное число надо разложить на два слагаемых так, чтобы их произведение было наибольшим, эти слагаемые надо взять одинаковыми (задача № 501 в пособии «Алгебра и начала анализа 9»). Поскольку

$$(2+\sin x)+(6-\sin x)=8,$$

функция (5) принимает наибольшее значение на $\mathbb{R}$ при $2+\sin x=6-\sin x$, то есть при $\sin x=2$ — абсурд! Поэтому этот школьник сделал вывод, что функция (5) экстремальных значений не имеет.

Решив эту задачу обычным способом (используя производную), легко найти, что функция (5) имеет экстремальные значения в точках, для которых $\cos x=0$, именно, $y_{min}=7$, $y_{max}=15$.

В чем же ошибка первого рассуждения? А дело в том, что в задаче 3 речь идет не о числах, а о функциях, и нужное нам утверждение, обобщающее вышеприведенное, звучит так: *если всюду определенная функция f принимает в какой-то точке x_0 значение $\frac{c}{2}$, то функция*

$$g(x)=f(x)\cdot[c-f(x)]$$

(Окончание см. на с. 60)

Заочная школа программирования

Ровно год назад в «Кванте» были напечатаны первые уроки Заочной школы программирования, организованной редакцией нашего журнала и Вычислительным центром Сибирского отделения АН СССР. Сегодня в нашей школе занимаются свыше двух тысяч ребят разного возраста — от третьего до десятого класса — из всех республик Советского Союза и некоторых зарубежных стран. В работе Школы участвуют более 40 групп «Коллективный ученик», создано два региональных центра (в Ленинграде и Свердловске).

Летом 1980 года активисты Заочной школы были приглашены на V Летнюю школу юных программистов, проходившую в новосибирском Академгородке (о ней мы расскажем в № 12).

Сегодня начинается публикация уроков второго курса Заочной школы. Напоминаем, что решения заданий каждого урока должны быть выполнены в отдельной тетради в клеточку или на двойном листе. На обложке тетради (или на первой странице листа) необходимо указать фамилию, имя, отчество, регистрационный номер, точный почтовый домашний адрес (с указанием индекса), номер школы и класса. К работе необходимо приложить полностью подписанный (включая обратный адрес) конверт нужного размера для возвращения проверенной работы. На этот конверт надо наклеить шестикопеечную марку.

Работы, оформленные с нарушением этих правил, не проверяются и не возвращаются.

Работы надо отправлять на проверку не позднее 15 дней с момента получения журнала (дату получения журнала укажите на обложке тетради или первом листе). Отправлять работы надо только простым (незаказным) письмом или простой бандеролью. В правом нижнем углу конверта пишите слово «КВАНТ».

Школьники, проживающие в прибалтийских республиках, в Псковской, Новгородской, Ленинградской, Архангельской и Вологодской областях, в Карельской и Коми АССР, направляют свои работы по адресу: *190000, Ленинград, ул. Герцена 67, ЛИАП, кафедра вычислительной математики и АСУ, Северо-Западный филиал Заочной школы программирования.*

Школьники, проживающие в Свердловской, Пермской, Челябинской и Оренбургской областях и Башкирской АССР, пишут по адресу: *620219, Свердловск, ул. К. Либкнехта 9, Педагогический институт, кафедра вычислительной математики и программирования, Уральский филиал Заочной школы программирования.*

Жители остальной территории СССР и зарубежные читатели направляют работы по прежнему адресу: *630090, Новосибирск 90, проспект Науки 6, ВЦ СО АН СССР, отдел информатики, Заочная школа программирования.*

Учащиеся 5—9 классов, желающие присоединиться к работе школы, могут начать заниматься со второго курса. Для этого необходимо прислать заявление по форме, приведенной в «Кванте», 1979, № 9, не позднее, чем через 15 дней после получения этого журнала; прочитать уроки первого курса «Квант», 1979, №№ 9—11 и 1980, №№ 1—3); выполнить все задания первого курса, включая задачи Олимпиады по программированию («Квант», 1980, № 3); отправить решения в Заочную школу не позднее 7 ноября 1980 г. По результатам проверки этих решений новички будут зачисляться на второй курс, о чем они получат соответствующие извещении.

Из-за типографских трудностей в уроках второго курса задания для самостоятельного исполнения не будут отмечаться стрелками. Задания повышенной трудности, выполнение которых не обязательно, будут обозначаться звездочкой.

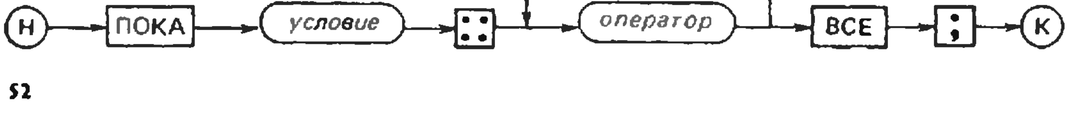
Желаем удачи!

Урок 9: Циклы

С понятием цикла читатели «Кванта» познакомились в № 1 за 1980 г., где была приведена синтаксическая диаграмма оператора цикла в Рапире.

Сегодня мы рассмотрим некоторые примеры использования циклов.

Для начала составим программу, которая с помощью процедур Шпаги



(«Квант», 1980, № 1) рисует нотную строку (рис. 1) длиною 100 мм с расстоянием между линейками в 2,5 мм. Допустим, что нижняя линейка должна быть проведена на высоте 10 мм.

До написания программы отметим следующее:

— неразумно рисовать каждую линейку отдельно: надо написать операторы рисования одной линейки, а затем несколько раз повторить их в *цикле*;

— поскольку одна линейка от другой отличается только высотою, в качестве ***переменной цикла*** имеет смысл выбрать координату y;

— при каждом повторении цикла его переменная изменяется на постоянную величину $\Delta y = 2{,}5$, которую называют *шагом*;

— первое выполнение повторяющихся в цикле операторов (рисование первой снизу линейки) осуществляется при $y_0 = 10$; значит, перед началом цикла нужно обеспечить, чтобы величина y получила ***начальное значение*** 10; присваивание начального значения переменной цикла называют ее ***инициализацией***; повторяющиеся операторы цикла называются *телом цикла*;

— по определению *условия*, записываемого после слова ПОКА («Квант», 1980, № 1), цикл завершается, когда изменяемая в ходе выполнения цикла переменная y достигает своей *границы* y_k, которая вычисляется по формуле

$$y_k = y_0 + \Delta y \cdot (n-1), \qquad (1)$$

где n — число повторений цикла. В нашем примере $y_k = 10 + 2{,}5(5-1) = 20$.

Программа рисования нотного стана имеет вид:

```
10—>Y;
ПОКА Y=<20::                        (2)
  П(0,Y);Л(100,Y);Y+2.5—>Y
ВСЕ
```

Несложное в нашем примере вычисление границы переменной в других задачах может оказаться более трудоемким. Во всяком случае, каждое «ручное» вычисление при составлении программы — это источник возможных ошибок. Когда число повторений заранее известно (как в нашем примере), можно избавиться от таких вычислений, использовав в программе счетчик числа повторений, который будет играть роль переменной цикла. Поэтому надо не забыть инициализировать счетчик в начале выполнения программы. Нашу программу можно тогда переписать в следующем виде:

```
1—>СЧЕТЧИК; 10—>Y;
ПОКА СЧЕТЧИК=<5::
  П(0,Y);Л(100,Y);                  (3)
  Y+2.5—>Y;
  СЧЕТЧИК+1—>СЧЕТЧИК
ВСЕ
```

Задание 9.1. *Напишите два варианта программы, рисующей домик с забором, составленным из 12 досок. Размеры (в мм) деталей изображения отмечены на рисунке 2.*

А теперь вернемся к нашей нотной строке и чуть-чуть усложним задачу: нотную строку требуется разметить тактами — вертикальными черточками поперек нотных линеек (рис. 3). На строке размещается 8 тактов. Значит, размер поля между тактовыми чертами — $100/8 = 12{,}5$ мм. Программа записывается так:

```
1—>СЧЕТЧИК; 10—>Y;
ПОКА СЧЕТЧИК=<5::
  П(0,Y);Л(100,Y);
  Y+2.5—>Y;                         (4)
  СЧЕТЧИК+1—>СЧЕТЧИК
ВСЕ;
1—>СЧЕТЧИК; 0—>X;
```

Рис. 1.

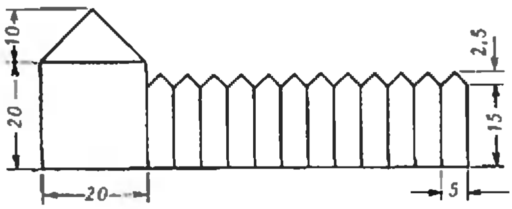


Рис. 2.

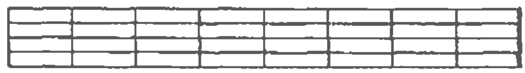
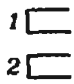


Рис. 3.

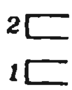
```
ПОКА СЧЕТЧИК=<8::
   П(X,10);Л(X,20);
   X+12.5—>X;
   СЧЕТЧИК+1—>СЧЕТЧИК
ВСЕ
```

В программе (4) — два цикла. Второй из них (тот, который рисует черточки тактов) начинается только после того, как полностью завершен первый (цикл, рисующий нотный стан).

Схематически циклы программы (4) можно изобразить так:



Такой же результат мы получили бы, если бы циклы 1 и 2 были включены в программу (4) в ином порядке:



Если действие одного цикла завершается раньше начала другого, такие два цикла называются *независимыми*.

Для переменных в двух независимых циклах можно использовать одинаковые имена. Это даже приводит к некоторой экономии места в памяти. Впрочем, стремиться к такой экономии не рекомендуется, так как читать программу с именами-синонимами становится труднее: встретив такое имя, приходится размышлять, какую из переменных оно обозначает. В (4) два различных счетчика названы одинаковыми именами. Использование одного имени для переменных X и Y кажется менее очевидным.

Задание 9.2. *Перепишите программу (4) так, чтобы переменные X и Y имели одно имя, например ПАРАМЕТР. Объясните, как работает такая программа.*

Для знакомства с циклами, не являющимися независимыми, рассмотрим сначала очень простую программу, рисующую «засохшую» елку с единственной сохранившейся двойной веткой (рис. 4); елка растет, например, из точки (10,0):

```
П(10,0);Л(10,30);
П(10—3,30—2);Л(10,30);          (5)
Л(10+3,30—2)
```

Конечно, в качестве параметров в процедурах ПОДВОД и ЛУЧ последней строки можно было бы подставить уже вычисленные значения 7=10—3, 28=30—2 и 13=10+3. Однако использованная в программе (5) форма записи параметров (разрешенная в Рапире) выбрана намеренно, чтобы было проще пояснить несколько следующих программ.

Действительно, от программы (5) теперь очень просто перейти к программе, рисующей на этот раз не засохшую, а «живую» елку с 9 ветвями, которые расположены на стволе на расстоянии 2,5 мм друг от друга. Достаточно сделать из операторов, рисующих ветку, тело цикла с шагом 2,5 и границей переменной СЧЕТ ВЕТОК, равной 9 (рис. 5). Для этого, очевидно, надо заменить постоянное значение 30 на переменную Y (инициализация переменной Y производится именно этим значением 30):

```
П(10,0);Л(10,30);
30—>Y;1—>СЧЕТ_ВЕТОК;
ПОКА СЧЕТ_ВЕТОК=<9::            (6)
   П(10—3,Y—2);Л(10,Y);
   Л(10+3,Y—2);
    СЧЕТ_ВЕТОК+1—>
    СЧЕТ_ВЕТОК; Y—2.5—>Y
ВСЕ
```

Теперь расширим задачу, задавшись целью нарисовать аллею из 8 елок, расположенных на расстоянии 12 мм одна от другой, пользуясь программой (6) (рис. 6):

```
10—>X;1—>СЧЕТ_ЕЛОК;
ПОКА СЧЕТ_ЕЛОК=<8::
   П(X,0);Л(X,30);30—>Y;
   1—>СЧЕТ_ВЕТОК;
   ПОКА СЧЕТ_ВЕТОК=<9::
      П(X—3,Y—2);
```

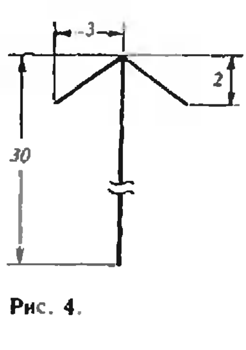


Рис. 4.

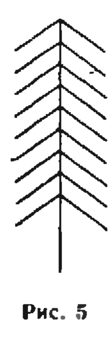


Рис. 5

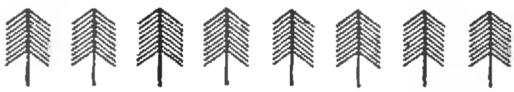
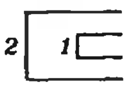


Рис. 6.

```
   Л(X ,Y);Л(X+3,Y—2);         (7)
   СЧЕТ_ВЕТОК+1—>
   СЧЕТ_ВЕТОК;Y—2.5—>Y
ВСЕ;
   СЧЕТ_ЕЛОК+1—>
   СЧЕТ_ЕЛОК; X+12—>X
ВСЕ
```

Цикл, рисующий елку (цикл 1), расположен внутри цикла, изображающего аллею (цикл 2). Поэтому они называются *внутренним* и *внешним* циклами; говорят также, что цикл 1 вложен в цикл 2.

При каждом повторении внешнего цикла 2 полностью выполняется внутренний цикл 1. Схема соотношения этих циклов имеет вид



Очевидно, переменные таких циклов должны быть различны и их нельзя именовать одним именем.

А теперь еще одно усложнение: из 5 аллей, рисуемых программой (7), надо создать лес (рис. 7). В этом «лесу» аллеи будут отличаться значением переменной Z, которая инициализируется нулем (ель первой аллеи «вырастала» в точке с ординатой 0). Шаг по Z равен 40. Программа, рисующая лес, имеет вид

```
0—>Z;1—>СЧЕТ_АЛЛЕЙ;
ПОКА СЧЕТ_АЛЛЕЙ=<5::
   10—>X;1—>СЧЕТ_ЕЛОК;
   ПОКА СЧЕТ_ЕЛОК=<8::
      П(X,Z);Л(X,Z+30);
      30—>Y;1—>СЧЕТ_ВЕТОК;
      ПОКА  СЧЕТ_ВЕТОК=<9::
         П(X—3,Y—2);Л,Y);
         Л(X+3,Y—2);                (8)
         СЧЕТ_ВЕТОК+1—>
         СЧЕТ_ВЕТОК;Y—2.5—>Y
      ВСЕ;
      СЧЕТ_ЕЛОК+1—>
      СЧЕТ_ЕЛОК;X+12—>X
   ВСЕ;
   СЧЕТ_АЛЛЕЙ+1—>
   СЧЕТ_АЛЛЕЙ;Z+40—>Z
ВСЕ;
```

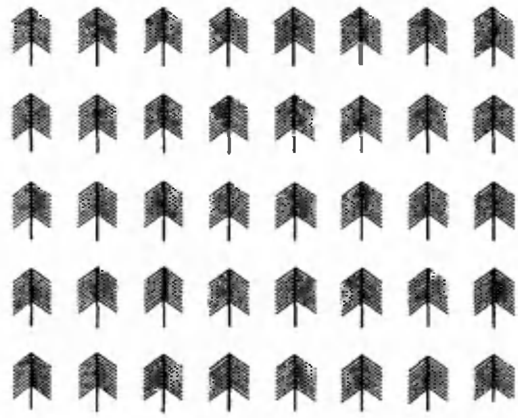
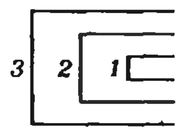


Рис. 7.

Циклы, участвующие в этой программе, схематически изображаются так:



Глубина вложенности циклов в программе (8) возросла; она равна теперь 3.

Задание 9.3. *Напишите программу, рисующую здание, показанное на рисунке 8.*

Вложенные циклы (7) и (8), бесспорно, выглядят громоздко. Однако очень простое средство — процедуры («Квант», 1980, № 2) — может сделать их компактными. Действительно, если ввести

```
ПРОЦ ВЕТКА XY;
  П(X—3,Y—2);Л(X,Y);
  Л(X+3,Y—2)
КНЦ
```

это упростит программу (6), которую, в свою очередь, можно офор-

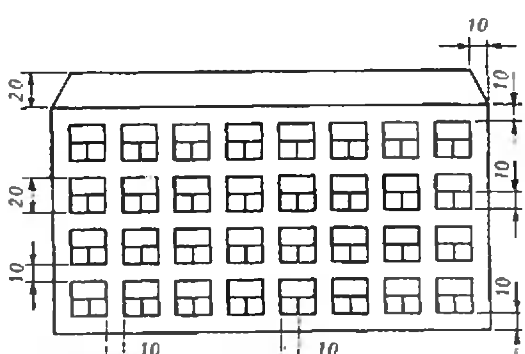


Рис. 8.

мить в виде процедуры

```
ПРОЦ ЕЛКА XZ;
  П(X,Z);Л(X,Z+30);
  Z+30—>Y; 1—>СЧЕТ_ВЕТОК;
  ПОКА СЧЕТ_ВЕТОК=<9::
     ВЕТКА(X,Y);
     СЧЕТ_ВЕТОК+1—>
     СЧЕТ_ВЕТОК;Y—2.5—>Y
  ВСЕ
КНЦ
```

В программе, рисующей аллею, упрощение, вводимое процедурой ЕЛКА, ощущается еще больше:

```
ПРОЦ АЛЛЕЯ Z;
  10—>X;1—>СЧЕТ_ЕЛОК;
  ПОКА СЧЕТ_ЕЛОК=<8::
     ЕЛКА(X,Z);
     СЧЕТ_ЕЛОК+1—>
   СЧЕТ_ЕЛОК;X+12—>X
  ВСЕ
КНЦ
```

Наконец, в этих обозначениях процедура ЛЕС (без параметров!) записывается совсем просто, «скрывая» реально существующую структуру трех вложенных циклов:

```
ПРОЦ ЛЕС;
  С—>Z;1—>СЧЕТ_АЛЛЕЙ;
  ПОКА   СЧЕТ_АЛЛЕЙ=<5::
     АЛЛЕЯ(Z);
     СЧЕТ_АЛЛЕЙ+1—>
     СЧЕТ_АЛЛЕЙ;Z+40—>Z
  ВСЕ
КНЦ
```

Программисты часто используют в своей практике такой прием «запроцедуривания».

Покажем еще два примера применения циклов, которые могут найти применение на школьных уроках математики.

Средства Шпаги позволяют начертить график заданной функции. Такая задача, в частности, предлагалась на Олимпиаде по программированию в «Кванте». Пусть, например, дана функция

$$y=f(x)=(x-1)^2+1. \qquad (9)$$

Надо построить график этой функции на отрезке $[a;\ b]=[0;\ 2]$. С этой целью отрезок $[a;\ b]$ разбивается на достаточно большое число N равных отрезков Δx : N — граница цикла, Δx — шаг цикла, определяющий точность приближенного построения графика. Для каждой

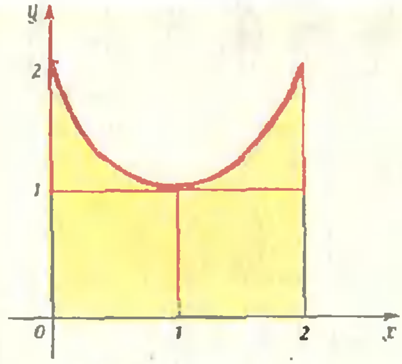


Рис. 9.

следующей точки разбиения надо вычислить значение $y(x+\Delta x)$, а затем соединить отрезком точку $(x;\ y)$ с точкой $(x+\Delta x;\ y(x+\Delta x))$.

Проверьте, что график на рисунке 9 воспроизводится программой

```
0—>X; 0.01—>ДЕЛЬТА;
П(0, 1);
ПОКА X=<2 ::
   Л(X, (X—1)!2+1);
   X+ДЕЛЬТА—>X
ВСЕ
```

(Здесь оказалось проще обойтись без счетчика, ибо число повторений заранее неизвестно, его еще надо вычислять, а граница переменной X определяется естественно.)

Задание 9.4. *Составьте программу, рисующую кривую, которая называется локоном Аньези:*

$$y=\frac{a^3}{a^2+x^2},$$

на отрезке $[-5;\ +5]$ *при* $a=2{,}5$.

Во всех приведенных выше примерах областью применения программ была машинная графика. Такой выбор примеров был сделан исключительно из соображений наглядности. В действительности, циклы употребляются во всяких программах — для редактирования текстов, обработки графических изображений, вычислительных задач и др.

Рассмотрим в качестве примера вычислительной задачи приближенное определение площади фигуры под графиком функции на рисунке 9 (ср. задание 2г Олимпиады по программированию). Она может быть представлена суммой площадей прямоугольников, у каждого из которых

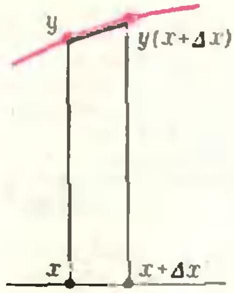


Рис. 10.

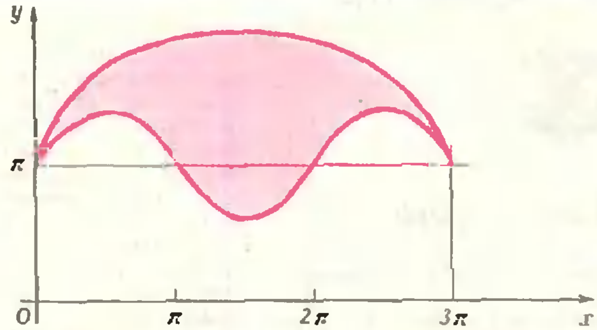


Рис. 11.

основанием является Δx, а высотами $y(a)$, $y(a+\Delta x)$, $y(a+2\Delta x)$... соответственно. Тогда закрашенная на рисунке 9 площадь приближенно вычисляется по программе

```
0-->X; 0-->ИНТЕГРАЛ;
0.01-->ДЕЛЬТА;
ПОКА X=<2 ::                          (10)
  ИНТЕГРАЛ+ДЕЛЬТА*
  ((X-1)!2+1)-->ИНТЕГРАЛ;
  X+ДЕЛЬТА-->X
ВСЕ
```

Десятиклассников не удивит, конечно, что площадь, получаемая в результате выполнения программы (10), названа ИНТЕГРАЛ. В школьном курсе математики («Алгебра и начала анализа 10», п. 101) говорится, что интеграл от неотрицательной непрерывной функции есть площадь соответствующей криволинейной трапеции. Таким образом, программа (10) — типичный пример простейшей программы *численного интегрирования*.

Использованный в этой программе метод численного интегрирования называется *методом прямоугольников:* в теле цикла вычисляются площади элементарных прямоугольников, из которых складывается приближенное значение вычисляемой площади. Точность результата зависит от шага ДЕЛЬТА, а также от выбранного метода. Более точным, чем предыдущий, является *метод трапеций:* результирующая площадь при этом составляется из элементарных трапеций (рис. 10).

Задание 9.5. *Запрограммируйте вычисление того же интеграла, что и (10), методом трапеций.*

Подобные программы позволяют приближенно вычислять площади произвольных фигур: достаточно представить площадь сложной фигуры в виде двух (или более) фигур, для каждой из которых площадь вычисляется непосредственно определенным интегралом. Так, на рисунке 11 легко выделяются две синусоиды — полпериода «верхней» $y=3\sin\frac{x}{3}+\pi$ и полтора периода «нижней» $y=\sin x+\pi$.

***Задание 9.6.** *Составьте программу, вычисляющую площадь закрашенной на рис. 11 фигуры (не составляйте процедуру вычисления синуса, считая, что она уже существует: к ней можно обратиться простым вызовом* SIN(X)).

Ю. Первин

Наша обложка

Орнаментом принято называть фигуру причудливой формы, *группа самосовмещений* которой (см. «Квант», 1980, № 7, с. 4) содержит хотя бы одно перемещение, отличное от тождественного. И хотя «причудливость формы» не поддается точному описанию, это «определение» орнамента имеет достаточно ясный смысл. На второй странице обложки изображено несколько восточных орнаментов, группа самосовмещений которых содержит параллельный перенос (если, конечно, считать, что узор неограниченно простирается влево и вправо).

Новые книги

Мы продолжаем публиковать аннотации на книги по математике и физике, доступные и интересные нашим читателям. В этом номере мы рассказываем о двух сериях научно-популярных книг, выходящих в издательствах «Наука» и «Педагогика».

Издательство «Наука»

Серия Библиотечка «Квант»

Эта серия начинает выходить в этом году. Она, в первую очередь, предназначена для школьников, интересующихся физикой и математикой. Во втором и третьем кварталах выйдет 7 книг из этой серии, разнообразные по своей тематике, но объединенные общей идеей — заинтересовать школьников, показать им всю красоту и привлекательность математики и физики, возбудить у них интерес к этим наукам.

Математика

1. Александров П. С. *Введение в теорию групп.* Объем 10 л., тираж 300000 экз., цена 40 к.

Эта книга, написанная одним из крупнейших советских математиков академиком П. С. Александровым, представляет собой элементарное введение в теорию групп.

Понятие группы является одним из важнейших понятий современной математики. Методы теории групп широко используются в геометрии, топологии и алгебре. Очень важные и глубокие приложения теория групп находит в квантовой механике, ядерной физике и кристаллографии.

Написанная простым и ясным языком, снабженная большим количеством геометрических иллюстраций, эта книга является одним из лучших в мировой математической литературе пособий для первоначального ознакомления с теорией групп.

2. Оре О. *Приглашение в теорию чисел.* Перевод с английского. Объем 8 л., тираж 300000 экз., цена 45 к.

Книга известного норвежского математика О. Оре раскрывает красоту математики на примере одного из старейших ее разделов — теории чисел. (В «Кванте», 1979, № 12 публиковался отрывок из этой книги.)

Изложение основ теории чисел в книге во многом нетрадиционно. Наряду с теорией сравнений и сведениями о системах счисления содержатся рассказы о магических квадратах и о решении арифметических ребусов. При каждом удобном случае автор указывает на возможности практического применения изложенных результатов и знакомит читателя с современным состоянием теории чисел и нерешенными задачами.

3. Мочалов Л. П. *Головоломки.* Объем 7 л., тираж 300000 экз., цена 30 к.

Книга содержит около 200 головоломок — занимательных задач, для решения которых необходимы сообразительность и смекалка. Многие из головоломок, приведенных в этой книге, впервые увидели свет на страницах нашего журнала и вызвали большую читательскую почту.

Физика

1. Бронштейн М. П. *Атомы и электроны.* Объем 10 л., тираж 300000 экз., цена 40 к.

Эта книга была написана в 1935 году известным советским физиком и популяризатором науки профессором Матвеем Петровичем Бронштейном. Впервые, небольшим тиражом, она вышла в Ленинграде и практически сразу же стала библиографической редкостью.

В книге доступно и популярно рассказывается о развитии атомистики, о том, как впервые измерили массы атомов и их размеры, какие работы и опыты привели к открытию электронов и выяснению структуры атомов.

Данное издание книги завершается кратким очерком о жизни и научной деятельности М. П. Бронштейна.

2. Асламазов Л. Г., Слободецкий И. Ш. *Задачи по физике.* Объем 10 л., тираж 300000 экз., цена 40 к.

Авторы этого сборника в течение ряда лет занимались организацией и проведением различных физических олимпиад, в том числе и Всесоюзной олимпиады по физике.

В сборнике собраны задачи, имеющие «физическую изюминку». Для их решения не требуется знаний, выходящих за пределы школьной программы, но необходимо ясное и четкое понимание основных законов физики и умение применять свои знания в конкретной ситуации. Отдельные задачи являются исследовательскими. Чтобы их решить, необходимо провести небольшие самостоятельные исследования.

Большинство задач, помещенных в сборнике, не схематичны, а касаются различных реальных явлений природы. Некоторые задачи носят оценочный характер.

Многие задачи были использованы на физических олимпиадах, часть задач была опубликована в журнале «Квант». В конце сборника даются решения всех задач.

3. *Опыты в домашней лаборатории.* Объем 10 л., тираж 300000 экз., цена 40 к.

Эта книга составлена из лучших статей, опубликованных в Лаборатории «Кванта». В них описаны сравнительно простые опыты, которые читатель может проделать самостоятельно дома, используя простейшее оборудование, зачастую изготовленное им самим.

Читатель сможет научиться выращивать кристаллы, исследовать работу маятниковых механизмов, провести опыты со светом, используя граммофонную пластинку или шарик от подшипника. Все эти опыты помогут лучше понять физические законы, привьют навыки к самостоятельному физическому исследованию.

4. Фарадей М. *История свечи.* Перевод с англий-

ского. Объем 9 л., тираж 300000 экз., цена 50 к.

Книга, которой уже более ста лет, принадлежит к числу классических произведений научно-популярной литературы.

В основе книги лежат лекции для детей, прочитанные великим английским физиком Майклом Фарадеем. В них рассказывается о различных явлениях природы, с которыми связано горение свечи: о капиллярных явлениях и тяготении, испарении жидкостей и сжижении газов, химических реакциях и электричестве и о многом другом.

Книга, без сомнения, доставит подлинное удовольствие и школьнику, и учителю, и студенту, и физику. Все они прочтут книгу с неослабевающим интересом. И не только прочтут, но и повторят занимательные опыты, которые показывал Фарадей на своих лекциях.

К лекциям Фарадея добавлено послесловие профессора Б. В. Новожилова, которое знакомит читателя с современными представлениями о горении.

Издательство «Педагогика»

Серия «Ученые — школьнику»

Физика

1. Колесников О. В., Глазков Ю. Н. *На орбите — космический корабль.* Объем 5,5 л., тираж 200000 экз., цена 30 к.

Из этой книги читатели узнают о полетах искусственных спутников, об орбитальных и межпланетных станциях, познакомятся с основными и новейшими результатами исследований в области астрофизики и космологии.

В книге рассказывается также о становлении и развитии международного сотрудничества в освоении космоса человеком.

2. Патон Б. Е., Корниенко А. Н. *Огонь сшивает металл.* Объем 5,5 л., тираж 200000 экз., цена 30 к.

В книге рассказывается об одном из самых распространенных технологических процессов — сварке — и о представителях этой «огненной» профессии. Читатели узнают об основных этапах развития сварки, о большом вкладе в эту область техники русских и советских изобретателей. Книга расширит представление школьников о применении основных законов природы в решении конкретных задач современной сварочной техники.

3. Федосеев Д. В., Дерягин Б. В. *Алмазы делают химики.* Объем 5,5 л., тираж 200000 экз., цена 30 к.

В книге рассказывается о свойствах алмаза, об истории установления его природы, связанной с именами выдающихся химиков и физиков. Читатели узнают о природных алмазах различных типов, их основных месторождениях, методах поиска и добычи.

В увлекательной форме авторы рассказывают и об истории синтеза искусственных алмазов, о методах получения поликристаллических алмазных материалов, по своим свойствам не уступающих природным алмазам.

Из книги читатели узнают об основных областях применения природных и синтетических алмазов.

А. Егоров, М. Смолянский

Твой первый робот

Ученые планируют еще в этом веке создать на околоземных орбитах первые производственно-энергетические комплексы. Совершенно очевидно, что при их строительстве и эксплуатации не обойтись без «рабочих-автоматов» — без роботов.

С легкой руки писателей-фантастов робота обычно представляют в виде механического аналога человека: с руками, ногами и головой, снабженной органами зрения и слуха и даже некоторым подобием мозга. На самом деле робот — это автономное устройство, способное по заранее заданной программе автоматически выполнять определенный набор операций и в тех или иных ситуациях принимать самостоятельные решения. Совсем не обязательно роботу передвигаться при помощи ног: нередко удобнее и практичнее колеса или гусеницы. Функции глаз и ушей могут выполнять всякого рода детекторы, датчики и рецепторы. Единственное, без чего не обойтись, это «мозг» — устройство, способное перерабатывать информацию, логически осмысливать ее и выдавать управляющие команды. Наличие такого «мозга» — отличительная особенность всякого робота.

Настоящая эра робототехники еще впереди. Однако уже сейчас можно готовить себя к грядущей деятельности, разрабатывая и конструируя первые, еще простейшие, но вполне реальные роботы. Помочь в этом деле призвана книга Д. Хейзермана «Как самому сделать робот»*).

«Настоящая книга, — пишет в предисловии Д. Хейзерман, — рассказывает о весьма необычном роботе по имени Бастер. Этот небольшой по размерам механизм был создан специально для любителей самодеятельного творчества, которые хотят приложить руки в области техники, переживающей сейчас свой младенческий период,— в робототехнике... Бастер — нечто большее, чем игрушка или управляемый по радио механизм. Он ближе к живому существу. Бастер обладает основными рефлексами, собственной «волей» и даже индивидуальностью. Он не просто копирует поведение животных, а представляет собой самостоятельное существо, которое действует и реагирует в соответствии с чувствительным управляющим устройством, чутко воспринимающим изменения его внутреннего состояния и внешней обстановки».

Бастер строится не сразу, а постепенно совершенствуясь. Сначала это работающая модель электромобиля со всеми необходимыми атрибутами: корпусом, шасси, источником питания и, главное, системой управления.

---

*) Д. Хейзерман. *Как самому сделать робот.* Перевод с английского. М., «Мир», 1979

позволяющей электромобилю двигаться вперед — назад, менять скорость и совершать повороты. Первый шаг на пути превращения модели в робот — сборка схемы управления поворотом, которая автоматически поворачивает колеса на нужный угол и автоматически возвращает их в среднее положение после снятия управляющего сигнала.

Следующий шаг — введение дешифратора команд. Различные комбинации четырех входных сигналов (задаваемых положениями тумблеров на панели управления) позволяют получить 16 различных команд, например «круто влево» или «медленно назад». На этом завершается конструирование Бастера I — простейшего механизма, еще не робота, а, скорее, усовершенствованной игрушки.

Затем происходит дальнейшее совершенствование механизма. Вначале вводится селектор команд, обеспечивающий отбор среди команд, поступающих на вход дешифратора, таких, которые наилучшим образом отвечали бы сложившейся ситуации. Здесь реализуется так называемая интегративная функция, свойственная и человеческому мозгу. Одно из проявлений такой функции — установление приоритета действий. Например, высший приоритет присваивается командам блока «отъезд», который отводит робота от стен и прочих препятствий. Следующий приоритет — командам блока «голод», который обнаруживает, что аккумуляторы разрядились и их требуется подзарядить, иначе робот «умрет голодной смертью». Попав в тупик, откуда робот не может выбраться самостоятельно, или оказавшись с разряженными аккумуляторами, он подает сигнал бедствия, пока не придет помощь от оператора. Сам себе помочь он еще не может. Таков этап, который автор книги называет Бастером II.

Теперь конструктор может приступить к завершающему этапу — созданию Бастера III, который характеризуется способностью к действию слежения. Автор ограничивается двумя такими действиями: движением по полу вдоль белой линии и поиском зарядного устройства. Особенно интересен (и сложен) блок «голод», осуществляющий последнее действие. В тот момент, когда аккумуляторы разрядятся до определенного уровня, робот не ограничивается подачей звукового сигнала, а начинает активно осуществлять подзарядку. Звуковой сигнал включает «мигалку» зарядного устройства, посредством фотоэлементов робот обнаруживает его и, ведомый следящим устройством, устремляется к нему, а, достигнув, самостоятельно подключается к гнезду.

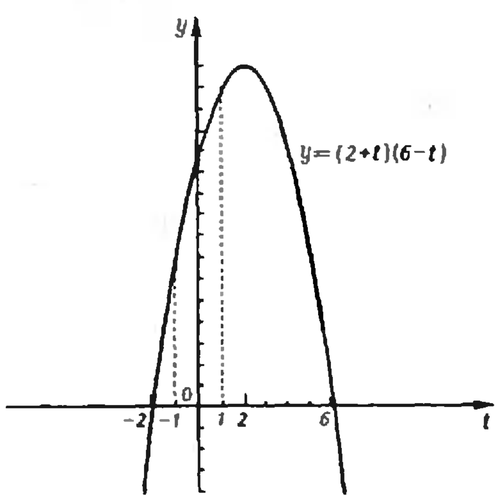
Этой цели служит сложный комплекс электронных, релейных и механических устройств и приспособлений, а главное — логических схем и блоков автоматического управления. Тот, кто справится с разработкой, монтажом и отладкой такой системы, способен будет создать множество других схем, расширив способности своего робота.

И вообще, автор постоянно нацеливает читателя на творческий подход к делу, а не на слепое копирование предлагаемых им схем и устройств. В этом — одно из ценных качеств книги.

И. Зорич

Три стандартные задачи

(Начало см. на с. 51)



принимает наибольшее значение на **R** *в точке* x_0:

$$f(x)\cdot[c-f(x)]=\frac{c^2}{4}-\left[f(x)-\frac{c}{2}\right]^2.$$

Но функция $f(x)=2+\sin x$ значение $\frac{8}{2}=4$ ни в какой точке не принимает. Поэтому решать задачу 3 при помощи этого утверждения нельзя.

Она допускает простое решение и без нахождения производной. Поскольку $-1\leqslant\sin x\leqslant 1$ и функция $y=(2+t)(6-t)$ на отрезке $[-1;\ 1]$ возрастает (см. рис.), функция (5) принимает наибольшее значение на **R** в тех точках, в которых $\sin x=1$, то есть при $x=\frac{\pi}{2}+2\pi k$ $(k\in\mathbf{Z})$.

Эволюта

Понятие эволюты было придумано Христианом Гюйгенсом (1629—1695) в период, когда он работал над теорией маятниковых часов.

Если к заданной кривой AB провести «все» касательные, а затем провести перпендикуляры к ним в точках касания — *нормали*, эти нормали «часто» будут касательными к некоторой новой кривой CD (рис. 1); кривая CD называется *огибающей* семейства нормалей или *эволютой* кривой AB.

Возникает вопрос: для какой кривой существует эволюта? Ответ дает следующее утверждение: *любая достаточно гладкая кривая*), не содержащая прямых участков, имеет эволюту.* При этом мы считаем, что эволюта окружности (дуги окружности) вырождается в точку (центр).

Существует эффективный способ практического построения нормалей при помощи зеркальца. Пусть нужно построить нормаль к кривой в точке M. Поставим зеркало перпендикулярно бумаге так, чтобы край зеркала проходил через точку M. При этом часть кривой, отраженная в зеркале, и сама кривая в точке M будут образовывать излом. Повернув зеркало до тех пор, пока кривая и ее отражение не сольются в гладкую кривую без излома в точке M, проведем по краю зеркала прямую. Эта прямая и служит нормалью к кривой в точке M (почему?).

Таким способом нетрудно построить эволюты параболы (рис. 2) и эллипса (рис. 3).

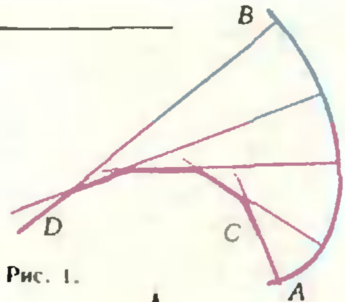


Рис. 1.

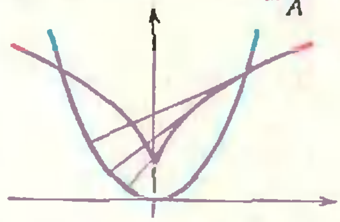


Рис. 2.

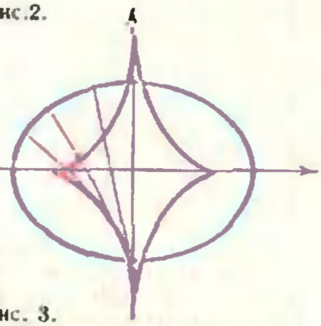


Рис. 3.

Рис. 4.

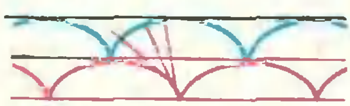


Рис. 5.

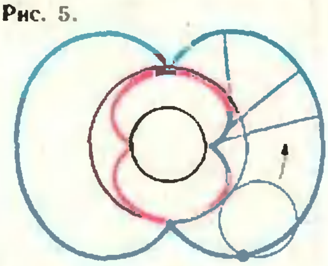


Рис. 6.

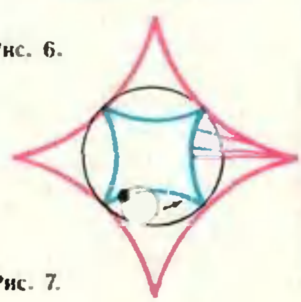


Рис. 7.

Другой интересный пример доставляет *циклоида***) — кривая, которую описывает фиксированная точка окружности катящейся без скольжения по прямой (рис. 4). Изучая свойства циклоиды, Гюйгенс доказал замечательную теорему: *эволютой циклоиды служит точно такая же циклоида, только сдвинутая* (рис. 5).

Если окружность катится не по прямой, а по (неподвижной) окружности, касаясь ее изнутри, траектория фиксированной точки подвижной окружности называется *гипоциклоидой*. Если же окружность катится, касаясь неподвижной окружности извне, получающаяся кривая называется *эпициклоидой*.

Эволютами к эпициклоидам и гипоциклоидам занимался Исаак Ньютон. Он, в частности, доказал, что *эволютой эпициклоиды (гипоциклоиды) служит эпициклоида (гипоциклоида), подобная данной с коэффициентом подобия* $\frac{q}{q+2}$ *(для гипоциклоиды* $\frac{q}{q-2}$*), с тем же центром неподвижной окружности, но повернутая на угол* π/q*, где* q *— отношение радиуса неподвижной окружности к радиусу подвижной.*

Иллюстрацией этой теоремы Ньютона служат рисунки 6 и 7, на которых синим цветом показаны исходные кривые, а красным — их эволюты.

На первой странице обложки в декоративном обличье изображены огибающие эпициклоида и гипоциклоида.

В. Вавилов

*) То есть, грубо говоря, кривая с плавно изменяющейся касательной.

**) Первым, кто изучил циклоиду, был, видимо, Г. Галилей. По свидетельству его учеников Вивиани и Торричелли, он же придумал название «циклоида», что значит «напоминающая круг».

Консультирует — чемпион мира по шахматам, международный гроссмейстер А. Карпов.

Ведет страничку — мастер спорта СССР по шахматам, кандидат технических наук Е. Гик.

Четвертьфинальные драмы

Наша сегодняшняя страничка посвящена итогам четвертьфинальных матчей на первенство мира. Перед их началом наибольший интерес вызвал поединок в Алма-Ате между М. Талем и Л. Полугаевским. Ведущий странички был в конце матча в столице Казахстана и сразу после его окончания попросил Льва Полугаевского объяснить причины его уверенной победы со счетом 5,5:2,5. Вот что сказал гроссмейстер.

— В последнее время популярность Таля, в связи с рядом его успехов, очень возросла. Думаю, такая атмосфера сыграла для него отрицательную роль. А когда я узнал, что в его тренерской группе неожиданно появились два бакинца — Г. Каспаров, недавно ставший самым молодым гроссмейстером мира, блестящий знаток современных дебютов, и мой бывший тренер В. Багиров, то мне стало ясно, что Таль хочет сделать ставку на дебют. Это я учел при подготовке к матчу.

Слова Полугаевского удачно иллюстрирует четвертая партия матча.

М. Таль — Л. Полугаевский
Сицилианская защита

1. е4 с5 2. Кf3 d6 3. d4 cd 4. К:d4 Кf6 5. Кс3 а6 6. Сg5 е6 7. f4 b5. Этот вариант детально разработан Полугаевским и носит его имя. Гроссмейстер даже написал о нем книгу под названием «Рождение варианта». Любопытно, что предисловие к ней принадлежит Михаилу Талю. **8. е5 de 9. fe Фс7 10. ef.** Во второй партии матча Таль пожертвовал слона — **10. С:b5+**, однако черные отбили атаку и одержали победу. **10...Фе5 + 11. Се2 F:g5 12. Фd3 Ф:f6 13. Лf1 Фе5 14. Лd1 Ла7 15. Кf3 Фс7 16. Кg5 f5 17. Фd4 h5.**

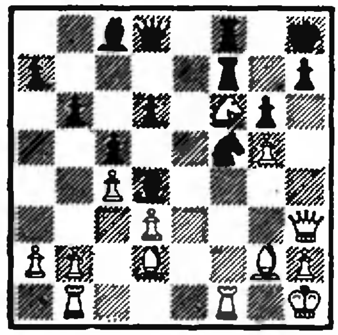
Данная позиция хорошо известна специалистам. Следующий ход, найденный Талем при домашней подготовке, мог бы ошеломить иного партнера...18. **Л:f5!?** Жертва целой ладьи!

В самолете, следующем рейсом Алма-Ата — Москва, наши места с Львом Полугаевским оказались рядом. «Хотите взглянуть на одну забавную вещь?» — спросил гроссмейстер. Мой сосед достал из портфеля потрепанную тетрадку, раскрыл ее на заложенной странице и протянул мне. На самом верху ее было начертано — 18. Л:f5, далее плотно, мелким почерком шел каскад вариантов, заканчивающихся где-то в районе 30-го хода. Анализы были внесены в тетрадь несколько лет назад... Да, действительно, экспериментировать с Полугаевским в дебюте не стоит...

Далее в партии последовало **18...ef 19. Кd5 Фd7 20. Фh4 Се7 21. Крf1 С:g5 22. С:h5+ Крf8 23. Ф:g5 Л:h5 24. Ф:h5 Фf7 25. Фh8+ Фg8 26. Фh4 Крf7 27. Фh5+g6 28. Фh4 Фg7 29. Фd8 Се6 30. Ф:b8 Лd7 31. с4 bc.** Влияние цейтнота. Убедитесь сами, что 31...Ф:b2 приводило к решающему перевесу черных. **32. Кс3 Л:d1+33. К:d1 Фd4 34. Кс3 Фd3+ 35. Крf2 Фd4+ 36. Крf1 Фd3+. Ничья.**

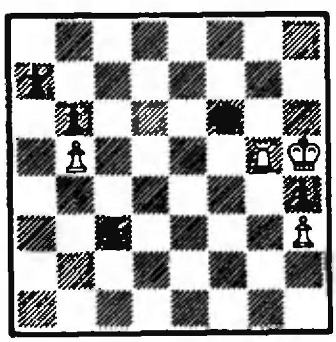
В полуфинале Л. Полугаевский встречается с В. Корчным, взявшим верх над экс-чемпионом мира Т. Петросяном со счетом 5,5:3,5.

Напряженно протекал матч между Б. Спасским и Л. Портишем. Десяти партий оказалось недостаточно — противники одержали по одной победе и восемь встреч завершили вничью. Все четыре дополнительные партии также закончились мирно. По положению предпочтение в этом случае отдавалось участнику, выигравшему больше партий черными. Счастье оказалось на стороне венгерского шахматиста. (Курьезное сообщение было опубликовано в некоторых газетах. Оно гласило, что при ничейном исходе матча победителем становится тот, кто имеет больше побед!?!) Вот позиция, в которой, как оказалось решилась судьба матча.



Спасский сыграл здесь **24. Сс3?** и после **24...Ке3 25. Фh4 С:с3 26. bс К:f1 27. Л:f1 Сf5 28. d4 Л:f6 29. gf Ф:f6 30. Ф:f6+ Л:f6** просто остался без пешки и через восемь ходов вынужден был сдаться. Вместо **24. Сс3** заслуживало внимания 24. Сd5. Положение ферзя на h3 неуютно, но на 24...Ке3 его можно пожертвовать — 25. Ф:е3!? С:е3 26. С:е3, и далее Се3-d2-с3. Проанализируйте сами эту возможность.

Противником Л. Портиша в полуфинале стал Р. Хюбнер, обыгравший гроссмейстера А. Адорьяна с минимальным перевесом 5,5:4,5. Драматически для венгерского шахматиста сложилась предпоследняя партия матча.



После 65...Л:h3 черные выигрывали партию и сравнивали счет. Однако они сыграли **65...Лс5**, рассчитывая перейти в легко выигранный пешечный эндшпиль. На это последовал фантастический ответ **66. Кр:h4!!**, и Хюбнеру удалось чудом спасти партию, так как взятие ладьи **66...Л:g5** привело к пату!

Метод виртуальных перемещений

1. $\lg a_1 = \frac{m_1}{m_2} \lg a_2$.

2. $T = n(m + M/2)g$.

«Неверно, что...» — как это понимать?

1. $a \leqslant 2$; это предложение можно прочитать как *a не больше 2.*

2. Нет; эти предложения могут быть одновременно ложными.

3. а) *551 — не простое число.* б) *Некоторые млекопитающие не живут на суше.* в) *Все собаки не летают.*

4. $2 \cdot 2 = 4$.

5. *Существует простое четное число.* Это предложение истинно, так как простое четное число действительно существует: 2.

6. *Во всякой школе некоторые ученики интересуются спортом.*

7. Не пойти в кино и не погулять.

8. *Число 899 делится на 31 и не делится на 13.* Это предложение истинно; следовательно, предложение *Если число 899 делится на 31, то это число делится на 13* ложно.

Проверьте себя

Правильные ответы указаны в нижеследующей таблице:

Класс	Номер вопроса 1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
VIII	Б	В	А	А	Г	В	В	Д	А	Б
IX	В	Б	В	Г	Г	Б	А	Г	Д	Б

«Квант» для младших школьников

(см. «Квант» № 8)

1. а) Если $\overline{abc} = (a+b+c)^3$, то $5 \leqslant a+b+c \leqslant 9$, откуда $a+b+c = \{5, 6, 7, 8, 9\}$.

Нетрудно сообразить, что $a+b+c$ не может равняться 5, 6 и 9 (кубы этих чисел оканчиваются на 5, 6 и 9 соответственно). Остается проверить случаи $a+b+c=7$ и $a+b+c=8$.

Имеем: $7^3 = 343$ — не подходит; $8^3 = 512$ — подходит. Таким образом, искомое число равно 512.

б) Если $\overline{abcd} = (a+b+c+d)^4$, то $6 \leqslant a+b+c+d \leqslant 9$, то есть $a+b+c+d = \{6, 7, 8, 9\}$.

Снова $a+b+c+d \neq 6$, поскольку 6^4 оканчивается на 6.

Убедитесь самостоятельно, что $a+b+c+d$ не может равняться 8 и 9.

При $a+b+c+d=7$ получаем $7^4 = 2401$ — искомое число.

в) Если $\overline{abcde} = (a+b+c+d+e)^5$, то $7 \leqslant a+b+c+d+e \leqslant 9$, откуда $a+b+c+d+e = \{7, 8, 9\}$. Но 7^5, 8^5 и 9^5 оканчиваются соответственно на 7, 8 и 9. Значит, пятизначного числа, равного пятой степени суммы своих цифр, нет.

2. При торможении воздух в вагоне по инерции продолжает двигаться вперед, создавая разрежение в задней части вагона и уплотнение в передней его части. Поэтому в задний тамбур через щели вентиляции стал поступать воздух снаружи, а из окон вагона он выходил наружу. Очевидно, рассказчик находился в заднем тамбуре.

3. Ответ. Нельзя.

Задача сводится к уравнению $3x + 9y = 80$ (x, y — количество монет достоинством в 20 и 50 копеек соответственно), которое не имеет решений в целых числах (80 не делится на 3).

4. Ответ. Можно.

Дипломат A должен побеседовать с шестью дипломатами B, C, D, E, F и G. При каждом новом размещении он побеседует не более, чем с двумя дипломатами. Поэтому он должен сесть за стол не менее трех раз.

На рисунке 1 приведен пример трех нужных размещений дипломатов за круглым столом.

5. Поскольку сумма всех чисел на циферблате составляет 78, ее необходимо уменьшить до 51 с помощью какой-либо «хитрости». Ясно, что «хитрость» в том, чтобы вместо чисел 10, 11 и 12 рассматривать «сумму цифр» $1+0$, $1+1$ и $1+2$.

Теперь нетрудно отыскать приведенное на рисунке 2 (или аналогичное) решение.

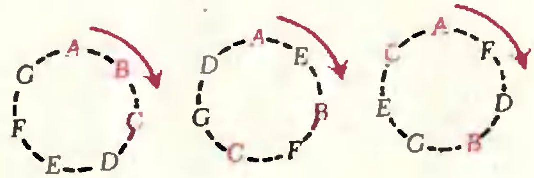


Рис. 1.

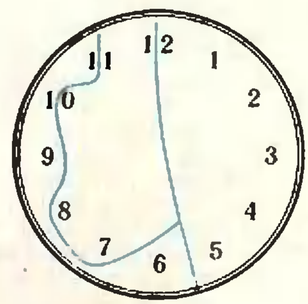


Рис. 2.

Задачи наших читателей
(см. «Квант», № 8, с. 11)

9. Ответ. $n=3,4$ или 5. Указание. Рассмотрите выпуклую оболочку множества M (наименьший выпуклый многоугольник, содержащий все точки M). Докажите, что возможны следующие три случая: выпуклая оболочка M является

1) *прямоугольным треугольником;*
2) *остроугольным треугольником;*
3) *прямоугольником.*

Покажите, что в первом случае $n=3$ или $n=4$ (три вершины прямоугольного треугольника или три его вершины плюс основание высоты, опущенной на гипотенузу). Во втором случае $n=3,4$ или 5 (три вершины треугольника; три его вершины плюс ортоцентр; три его вершины, ортоцентр плюс одна из трех точек — оснований высот данного треугольника). Наконец, в третьем случае $n=4$ или $n=5$ (четыре вершины прямоугольника и, если прямоугольник является квадратом, то четыре его вершины плюс центр квадрата).

10. Существует пять современных функций: $F_0(m)\equiv 0$ и $F_2(m)$, $F_3(m)$, $F_5(m)$, $F_{11}(m)$, где $F_p(m)$ определяется формулой

$$F_p(m)=\begin{cases}0, & \text{если } m \text{ делится на } p,\\ 1, & \text{если } m \text{ не делится на } p.\end{cases}$$

Указание. Докажите, что всякая современная функция принимает лишь значения 0 и 1. В частности, она обращается в нуль хотя бы в одной из точек 2, 3, 5, 11, так как $1980=2\cdot2\cdot3\cdot3\cdot5\cdot11$ и $F(1980)=0$. Затем докажите, что если существуют такие различные простые числа p и q, что $F_p=F_q=0$, и F — современная функция, то $F(m)=0$ при любом m.

11. 12.

Шахматный конкурс
(см. «Квант» № 7)
М

1. Удар А. Карпова **1.К:е5!!** заставил черных немедленно сдаться. Они могут на выбор взять ладью или ферзя, но в обоих случаях получают форсированный мат: 1...Ф:с8 2. Лf7+ Крh6 (2...Крg8 3.Фе4) 3.Фd2+ Сg5 4.Лf6+ Крh7 5.Ф:g5 Крh8 6.Лh6+ Лh7 7.Кf7×; 1...Ф:е2 2.Лf7+ Крh6 3.Лb8+ Крg5 4.Лg8+ Крh4 (4...Крh6 5.Лg6×) 5.Кg6+ Крg5 6.К:е7+ Крh4 7.Кf5×!; 5...Крg3 6.К:е7+ Фg4 7.Лf3+ Крh4 8.Кf5+ Ф:f5 9.Л:f5 Лg3 10.Лf4+ Лg4 11.Крh2 и 12.g3×.

2. Решает эффектный ход конем в угол доски — **1.Ка8!** и далее 1...Крd6 2.Крd4 Крс6 3.Фd5×.

3. Задание относится к жанру так называемых «ретроградных» задач. Нам необходимо выяснить, как могла получиться данная позиция из исходной расстановки фигур, то есть провести ее ретроанализ. Определим, какое число ходов, четное или нечетное, сделала каждая сторона, прежде чем возникла эта позиция. Легко убедиться, что королевская ладья, сколько бы ни ходила, с исходного поля h1 могла попасть на g1 только за нечетное число ходов, ферзевая ладья сделала нечетное число ходов, белые слоны не двигались с места, как и ферзь, который был взят конем черных. Белый король либо совсем не двигался, либо сделал четное число ходов. Из всех белых пешек ходила только одна ладейная, да и та продвинулась всего на одно поле, то есть на долю пешек приходится нечетное число ходов. Так как конь при каждом ходе меняет цвет поля, на котором он стоит, то оба белых коня вместе сделали нечетное число ходов.

Суммируя все ходы, сделанные белыми фигурами, в результате получаем четное число. Аналогичный расчет для черных фигур показывает, что ими сделано в общей сложности нечетное число ходов. Итак, белые сделали четное, а черные — нечетное число ходов. Так как партию начинают белые, то в нашей позиции ход черных, и именно они дают мат — **1...Ка1:с2×!**

4. При движении коня по доске черные и белые поля на его пути чередуются. Поэтому если конь в состоянии обойти все поля некоторой доски, посетив каждое из них по одному разу, то число ее белых и черных полей должно быть либо одинаковое, либо отличаться на 1. Однако на нашей доске 25 белых полей и 32 черных, то есть обход невозможен!

Номер готовили:
А. Виленкин, А. Егоров, И. Клумова, Т. Петрова, А. Сосинский, В. Тихомирова, Ю. Шиханович

Номер оформили:
М. Дубах, Г. Красиков, Э. Назаров, А. Пономарева, И. Смирнова

Зав. редакцией Л. Чернова

Художественный редактор Т. Макарова

Корректор М. Медведская

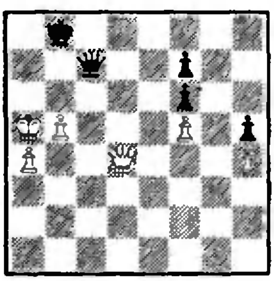
113035, Москва, М-35, Б. Ордынка, 21/16, «Квант», тел. 231-83-62
Сдано в набор 1/VII-80
Подписано в печать 22/VIII-80
Печать офсетная
Бумага 70×108 1/16. Физ. печ. л. 4
Усл. печ. л. 5,60 Уч.-изд. л. 6,97
Цена 30 коп. Заказ 1704 Т-14669
Тираж 260 550 экз.

Чеховский полиграфический комбинат
Союзполиграфпрома
Государственного комитета
СССР по делам издательств, полиграфии
и книжной торговли,
г. Чехов Московской области

ШАХМАТНЫЙ КОНКУРС

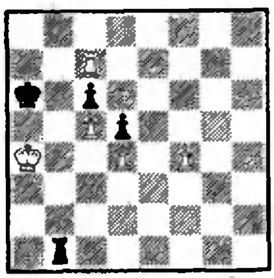
ПАТ НА ДОСКЕ

Драматический случай, происшедший в партии Хюбнер — Адорьян, подсказал нам очередную тему конкурса — пат на доске! Конечно, в практике гроссмейстеров дело редко кончается патом, но иногда, как мы видим, такие удивительные события случаются. Следующая позиция возникла 75 лет назад.



Положение белых, которыми играл великий русский шахматист М. Чигорин, совершенно выиграно. К. Шлехтер только что дал предсмертный шах 1...Фc7+, и Чигорин автоматически ответил **2.Фb6+**, собираясь перейти в пешечный эндшпиль (сравните с ходом Лc3-c5 Адорьяна!). Можно представить себе его удивление, когда он обнаружил, что король черных спокойно ушел в угол — **2...Крa8!** После 3.Ф:c7 (3. Крa6 Фc8+ 4.Крa5 Фc7 не меняет дела) черный король запатован. Ничья!

Завуалированную патовую ловушку, которая в свое время обошла всю мировую шахматную печать, подстроил М. Ботвинник в 20-й партии матч-реванша на первенство мира М. Талю (1961 год).

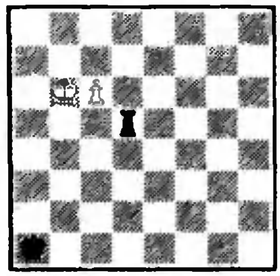


Эта позиция могла возникнуть при вторичном доигрывании партии. Положение черных выглядит безнадежным: после 1...Лd1 2.Л:c6+ Крb7 3.Лf6 Л:d4+ 4.Крb5 и 5.Лf7+ они должны сдаться. Однако Ботвинник при домашнем анализе нашел неожиданное спасение: **1...Лb4+!!** Теперь 2.Кр:b4 ведет к пату, а 2.Крa3 Л:d4 дает черным простую ничью. При доигрывании, за два хода до позиции на диаграмме, Таль обнаружил каверзную ловушку, пошел другим путем, но выигрыша у него уже не было. Партия закончилась вничью на 121 ходу. А на следующий день Ботвинник легко обыграл расстроенного чемпиона мира и вернул себе шахматную корону...

В шахматной композиции патовая идея — одна из самых популярных. В одних случаях белые спасаются, благодаря пату, в других — выигрывают, обходя тонкую патовую ловушку.

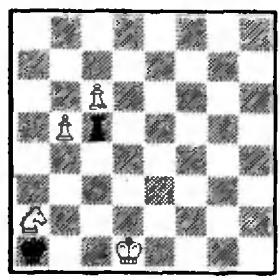
Очень часто пат возникает при превращении пешки в ферзя, однако цель достигается, если вместо ферзя на доске ставится более слабая фигура, обычно ладья (реже слон или конь). Такой прием в композиции называется «слабым превращением».

Классический этюд, всего с четырьмя фигурами, в котором идет полноценная борьба обеих сторон, представлен в конкурсном задании № 1. Во всей шахматной литературе трудно найти столь неожиданный и красивый финал при таком ограниченном материале.

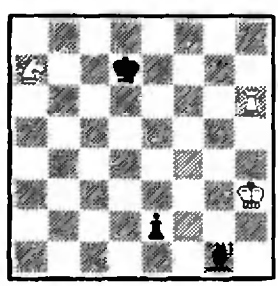


1. Ф. Сааведра, 1895 г. Белые начинают и выигрывают.

Конечно, в XX веке патовая идея Сааведры неоднократно совершенствовалась. Одну из лучших вариаций представляет собой конкурсное задание № 2.



2. М. Либуркин, 1931 г. Белые начинают и выигрывают.



3. А. Троицкий, 1910 г. Белые начинают и делают ничью.

Срок присылки решений — 31 октября 1980 г.

Индекс 70465
Цена 30 коп.

На этих фотографиях показаны яйцо и три его «модификации», полученные с помощью следующей общей конструкции. Нанесем на плоскость, на которой имеется некоторое изображение, несколько линий (прямых, окружностей и т. п.). Совокупность этих линий, разбивающих плоскость на «элементарные области», назовем «сеткой разреза».

Пусть сетка разреза обладает какой-нибудь симметрией; тогда некоторые элементарные области можно переставить местами в соответствии с этой симметрией. Если же элементарная область (или несколько) сама обладает симметрией, то ее можно вдобавок «повернуть» в соответствии с ней.

Именно таким путем были получены три «модификации» яйца на фотографиях. Проследите, как.

В. Колейчук